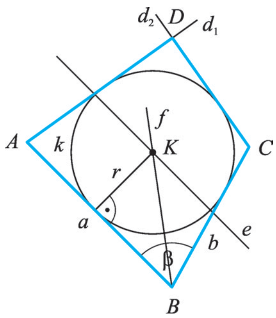
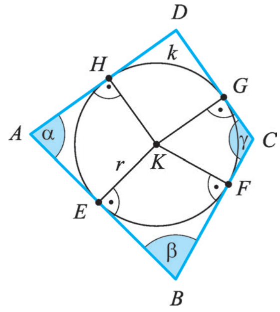
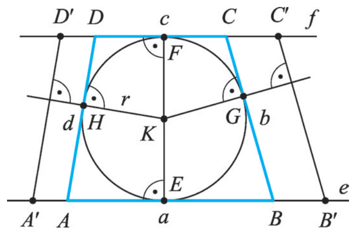
1012/I.



1012/II.



1013.



1008. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. ⇒ A sokszög egy-egy csúcsából induló érintőszakaszok egyenlők és két szomszédos oldal darabjai. ⇒ Minden egyes érintőszakaszból egyik páros sorszámú, másik páratlan sorszámú oldal része, és ezek az érintőszakaszok kiadják az összes oldalt. ⇒ A páros sorszámú oldalak összege egyenlő a páratlan sorszámú oldalak összegével.

1009. A deltoid akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha konvex. A deltoid akkor és csak akkor húrnégyszög, ha $2\alpha = 180°$, azaz $\alpha = 90°$. ⇒ A deltoid akkor és csak akkor érintőnégyszög és húrnégyszög egyszerre, ha két szemközti szöge derékszög.

1010. Legyenek a rombuszba írt kör érintési pontjai K, L, M, N. A rombuszba beírt kör középpontja az átlók metszéspontja: O. ($KO = LO = MO = NO$). $OK \perp AD$ az érintés miatt, valamint $OM \perp BC$ az érintés miatt. ⇒ $AD \parallel BC$ miatt K; O; M egy egyenesen van. Hasonlóan megmutatható, hogy N; O; L egy egyenesen van. ⇒ $KLMN$ négyszög átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást. ⇒ $KLMN$ téglalap.

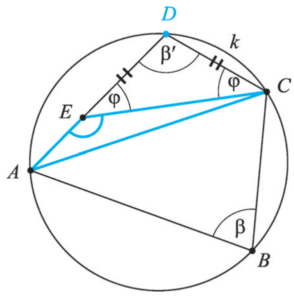
1011. Jelöljük a rombusz középpontját K-val, csúcsait A-, B-, C-, D-vel. A szerkesztés: ① a; r; $90° \to ADK\triangle$. ② A-t tükrözni K-ra: C. ③ D-t tükrözni K-ra: B. 0 vagy 1 megoldás lehet.

1012. *a)* Adott: a; b; β; r. A szerkesztés: ① a; b; $\beta \Rightarrow ABC\triangle$. ② β szögfelezője: f. ③ AB-vel párhuzamos a β felé r távolságra: e. ④ $f \cap e = K$. ⑤ K középpontú, r sugarú kör: k. ⑥ A-ból érintő k-hoz: d_1. ⑦ C-ből érintő k-hoz: d_2. ⑧ $d_1 \cap d_2 = D$. 0 vagy 1 megoldás lehet.
b) Adott: r; α; β; γ. Felhasználjuk, hogy az érintési pontba húzott sugarak a négyszöget négy húrnégyszögre bontják. A szerkesztés: ① K középpontú, r sugarú kör: k. ② K csúcsú, egymáshoz csatlakozó $(180° - \alpha)$; $(180° - \beta)$; $(180° - \gamma)$ szögek $\to H$; E; F; G. ③ H-ban, E-ben, F-ben és G-ben merőleges az oda érkező sugarakra. ④ a merőlegesek metszéspontjai: A; B; C; D. $\alpha + \beta + \gamma < 360°$ esetén egyértelmű megoldás van. $\alpha + \beta + \gamma \geq 360°$ esetén nincs megoldás.

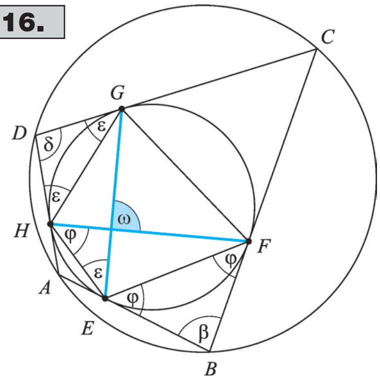
1013. A szerkesztés: ① k egy átmérőjének E és F végpontjában érintő: e és f. ② f tetszőleges C' pontjából b sugarú körív; e-vel való metszéspontja: B'. ③ K-ból merőleges $C'B'$-re, ennek metszéspontja k-val: G. ④ G-n át párhuzamos $C'B'$-vel, ennek e-vel és f-fel való metszéspontja: B és C. ⑤ f tetszőleges D' pontjából d sugarú körív; e-vel való metszéspontja: A'. ⑥ K-ból merőleges $A'D'$-re, ennek metszéspontja k-val: H. ⑦ H-n át párhuzamos $A'D'$-vel, ennek e-vel és f-fel való metszéspontja: A és D. 0; 2 egybevágó vagy 2-2 egybevágó trapéz a megoldás egy kiválasztott átmérőhöz.

1014. EF középvonal, K a két félkör érintési pontja. Az érintő körök középpontjai és az érintési pont egy egyenesen vannak. $ABCD$ érintőnégyszög $\Leftrightarrow AD + BC = AB + DC = 2EF \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow AD/2 + BC/2 = EF \Leftrightarrow EF$ ugyanabban a K pontban metszi az AD és a CB átmérőjű köröket $\Leftrightarrow K$ a két kör érintési pontja.

1015.



1016.



1015. Felhasználjuk, hogy $ABCD$ húrnégyszög, ezért $\beta + \beta' = 180°$. $ABCD$ érintőnégyszög, ezért $AB + CD = BC + DA \Rightarrow AB - BC = DA - CD$. Legyen $E \in AD$ olyan pont, amelyre $DE = CD. \Rightarrow AE = DA - DE = DA - CD = AB - BC$, másrészt $DEC\triangle$ egyenlő szárú, így $\varphi =$ $= (180° - \beta')/2 = \beta/2 \Rightarrow AEC\sphericalangle = 180° - \beta/2$. A szerkesztés: ① AC; $AB - BC$; $180° - \beta/2 \rightarrow$ $\rightarrow AEC\triangle$. ② AE egyenes kimetszi k-ból D-t. 0; 1 vagy 2 megoldás van.

1016. $ABCD$ érintőnégyszög, ezért $DH = DG$ és $BE = BF \Rightarrow DHG\sphericalangle = DGH\sphericalangle = \varepsilon$ és $BEF\sphericalangle =$ $= BFE\sphericalangle = \varphi$. Ezek érintőszárú kerületi szögek a beírt körhöz $\Rightarrow DHG\sphericalangle = HEG\sphericalangle$ és $BEF\sphericalangle =$ $= EHF\sphericalangle$. $ABCD$ húrnégyszög $\Leftrightarrow \beta + \delta = 180° \Leftrightarrow (180° - 2\varphi) + (180° - 2\varepsilon) = 180° \Leftrightarrow \varepsilon + \varphi =$ $= 90° \Leftrightarrow \underline{\underline{\omega = 90°}} \Leftrightarrow \underline{\underline{GE \perp HF}}$.

Hasonlóság

Kicsinyítés, nagyítás

Az **1017–1024.** feladatok szerkesztési lépései könnyen elvégezhetők.

1025. **1. eset:** EA képe EP. E középpontú hasonlóságot alkalmazunk. A szerkesztés: ① P pontban merőlegest állítunk az AE egyenesre $\Rightarrow m$. ② $m \cap e(E; B) = B'$. ③ B' ponton át párhuzamost húzunk a BC egyenessel $\Rightarrow f$. ④ $f \cap e(E; C) = C'$. ⑤ C' ponton át párhuzamost húzunk a CD egyenessel $\Rightarrow g$. ⑥ $g \cap e(E; D) = D'$.
2. eset: EA képe PA. A középpontú hasonlóságot alkalmazunk. A szerkesztés lépései hasonlóak az első eseteihez.

1026. A szerkesztés: ① $OB \cap e = B'$. ② B' ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow f'$. ③ $OA \cap f' = A'$, $OA \cap e = A''$. ④ A'' ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow f''$. ⑤ $OB \cap f'' = B'$. A megoldások száma 0, 1, 2 vagy végtelen sok lehet.

1027. A szerkesztés: ① $e(O; B) \cap k = \{B_1; B_2\}$. ② B_i ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow a_i$. ③ $e(O; A) \cap a_i = A_i$. ④ Az A pontból kiindulva is végrehajtjuk a fenti szerkesztési lépéseket. Négy megoldás lehet.

1028. A szerkesztés lépései az *a)*, *b)*, *c)* esetben: ① $e(O; C) \cap e = C'$, $e(O; D) \cap e = D'$. ② $C'D'$ oldalú négyzet $ABCD$-vel azonos félsíkban $\Rightarrow A'B'C'D'$. ③ $e(O; A) \cap e = A''$, $e(O; B) \cap e = B''$. ④ $A''B''$ oldalú négyzet $ABCD$-vel azonos félsíkban $\Rightarrow A''B''C''D''$.

1029. A hasonlóság az e és f egyenesek M metszéspontjába a négyzet valamelyik csúcsát viszi. $\Rightarrow$ A hasonlóság középpontja a négyzet valamelyik átlóegyenesének és egy rá nem illeszkedő csúcs és az M pont összekötő egyenesének metszéspontja. A szerkesztés:
① $e(A; C) \cap e(D; M) = P_1$. ② $e(A; C) \cap e(B; M) = P_2$. ③ $e(B; D) \cap e(C; M) = Q_1$.
④ $e(B; D) \cap e(A; M) = Q_2$. Ha valamelyik átlóegyenesen rajta van M, akkor végtelen sok megoldás van. Egyébként legfeljebb négy megoldás lehet.

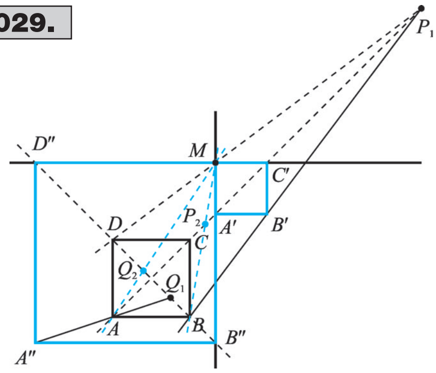
1030. Legyenek a téglalap csúcsai A, B, C és D, a négyzet csúcsai P, Q, R és S. $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$. A szerkesztés: ① $e(C; R) \cap e(B; Q) = K_1$. ② $e(K_1; S) \cap e(C;D) = S'$, $e(K_1;P) \cap e(A; B) = P'$. ③ $e(C; R) \cap e(D; S) = K_2$. ④ $e(D; S) \cap e(A; P) = K_3$. ⑤ $e(A; P) \cap e(B; Q) = K_4$. Négy megoldás lehet, K_2, K_3 és K_4 középpontokkal is egy-egy hasonló négyzet adódik.

1031. Legyenek a négyzet csúcsai A, B, C és D, az adott szakasz végpontjai E és F. A szerkesztés: ① EF oldalra mindkét irányban megszerkesztjük a négyzetet $\Rightarrow EFC'D'$ és $EFD''C''$. ② $e(A; E) \cap e(B; F) = O_1$ és $e(A; F) \cap e(B; E) = O_2 \Rightarrow O_1$, O_2 a hasonlóságok középpontjai. Két megoldás van. Ha az adott szakasz valamelyik négyzetoldal egyenesére esik, akkor másik megfelelő csúcspárt választunk a középpont megkeresésére.

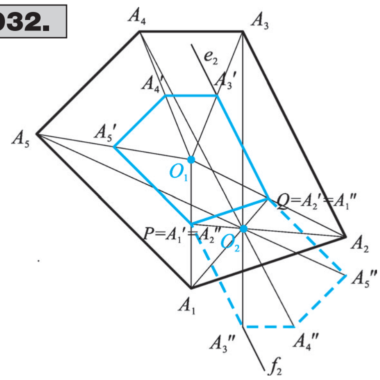
1032. **1. eset:** A_1 képe P, A_2 képe Q. A szerkesztés: ① $e(A_1; P) \cap e(A_2; Q) = O_1 \Rightarrow O_1$ a hasonlóság középpontja. ② Q ponton át párhuzamost húzunk az A_2A_3 egyenessel $\Rightarrow e_2$ és $e_2 \cap e(O_1; A_3) = A_3'$. ③ A_3' ponton át párhuzamost húzunk az A_3A_4 egyenessel $\Rightarrow e_3$ és $e_3 \cap e(O_1; A_4) = A_4'$. ④ A_4' ponton át párhuzamost húzunk az A_4A_5 egyenessel $\Rightarrow e_4$ és $e_4 \cap e(O_1; A_5) = A_5'$. **2. eset:** A_1 képe Q, A_2 képe P. A szerkesztés: ① $e(A_1; Q) \cap e(A_2; P) = O_2 \Rightarrow O_2$ a hasonlóság középpontja. ② P ponton át párhuzamost húzunk az A_2A_3 egyenessel $\Rightarrow f_2$ és $f_2 \cap e(O_2; A_3) = A_3''$. ③ A_3'' ponton át párhuzamost húzunk az A_3A_4 egyenessel $\Rightarrow f_3$ és $f_3 \cap e(O_2; A_4) = A_4''$. ④ A_4'' ponton át párhuzamost húzunk az A_4A_5 egyenessel $\Rightarrow f_4$ és $f_4 \cap e(O_2; A_5) = A_5''$. Két megoldás van.

1033. **1. eset:** $e(A; B) \neq e(D; E)$. A szerkesztés: ① D ponton át párhuzamost húzunk AC egyenessel $\Rightarrow d_1$. ② D ponton át párhuzamost húzunk BC egyenessel $\Rightarrow d_2$. ③ E ponton át párhuzamost húzunk BC egyenessel $\Rightarrow e_1$. ④ E ponton át párhuzamost húzunk AC egyenessel $\Rightarrow e_2$. ⑤ $d_1 \cap e_1 = C'$ és $d_2 \cap e_2 = C''$. ⑥ $e(A; D) \cap e(B; E) = O_1$ és $e(A; E) \cap e(B; D) = O_2 \Rightarrow O_1$, O_2 a hasonlóságok középpontjai. ⑦ $DEC'\triangle$ és $DEC''\triangle$ a keresett háromszögek. Egy megoldás van, ha $DE = AB$, ekkor $\lambda = -1$; két megoldás van, ha $DE \neq AB$. **2. eset:** $e(A; B) = e(D; E)$. A szerkesztés: ①–⑤ megegyezik az 1. esetben leírtakkal. ⑥ $e(C; C') \cap e(A; B) = O_1$ és $e(C; C'') \cap e(A; B) = O_2 \Rightarrow O_1, O_2$ a hasonlóságok középpontjai. ⑦ $DEC'\triangle$ és $DEC''\triangle$ a keresett háromszögek. Egy vagy két megoldás lehet.

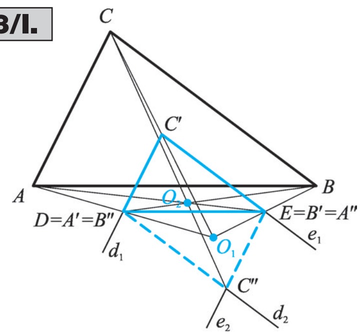
1029.



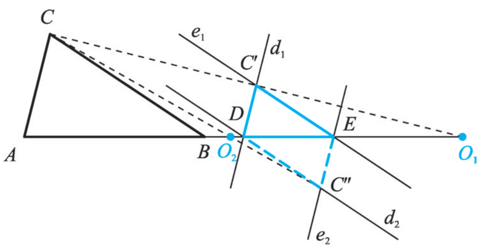
1032.



1033/I.

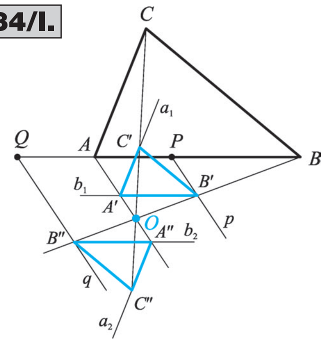


1033/II.

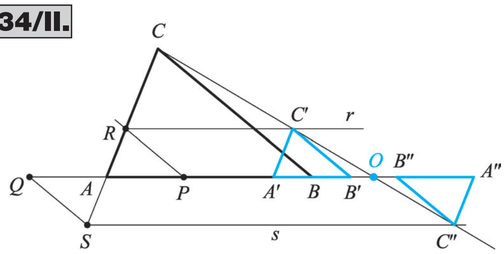


I

1034/I.



1034/II.



1034. Felhasználjuk, hogy az AB oldal és képe párhuzamos egymással. **1. eset:** az O pont nincs az AB egyenesen. A szerkesztés: ① AB-re A pontból d hosszúságú szakaszt mérünk mindkét irányban $\Rightarrow P$ és Q pontok. ② P ponton át párhuzamost húzunk AO egyenessel $\Rightarrow p$. Q ponton át párhuzamost húzunk AO egyenessel $\Rightarrow q$. ③ $p \cap \mathrm{e}(B; O) = B'$ és $q \cap \mathrm{e}(B; O) = B''$. ④ B' ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow b_1$. B'' ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow b_2$. ⑤ $b_1 \cap \mathrm{e}(A; O) = A'$ és $b_2 \cap \mathrm{e}(A; O) = A''$. ⑥ A' ponton át párhuzamost húzunk AC egyenessel $\Rightarrow a_1$. A'' ponton át párhuzamost húzunk AC egyenessel $\Rightarrow a_2$. ⑦ $a_1 \cap \mathrm{e}(C; O) = C'$ és $a_2 \cap \mathrm{e}(C; O) = C''$. Egy vagy két megoldás lehet.
2. eset: az O pont rajta van az AB egyenesen. A szerkesztés: ① AB-re A pontból d hosszúságú szakaszt mérünk mindkét irányban $\Rightarrow P$ és Q pontok. ② P és Q pontokon át BC egyenessel húzott párhuzamosok az AC egyenesből kimetszik az R és S pontokat. ③ R ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow r$, S ponton át párhuzamost húzunk AB egyenessel $\Rightarrow s$. ④ $r \cap \mathrm{e}(C; O) = C'$ és $s \cap \mathrm{e}(C; O) = C''$. ⑤ C' és C'' pontokon át AC egyenessel húzott párhuzamosok az AB egyenesből kimetszik az A' és A'' pontokat; C' és C'' pontokon át BC egyenessel húzott párhuzamosok az AB egyenesből kimetszik a B' és B'' pontokat. Egy vagy két megoldás lehet.

1035. A szerkesztés: ① Legyen P a k körnek az OA egyenesre nem illeszkedő pontja. ② O' ponton át párhuzamost húzunk PO egyenessel $\Rightarrow e$. ③ $e \cap \mathrm{e}(A; P) = P'$. ④ O' középpontú $O'P'$ sugarú kör $\Rightarrow k'$. Nincs megoldás, ha $A = O'$. Végtelen sok megoldás van, ha $A = O$. Egy megoldás egyébként.

1036. A szerkesztés: ① $A'B'$-re A' pontban α szöget, B' pontban β szöget mérünk. ② Az azonos félsíkban levő két-két szögszár metszéspontja C_1, illetve C_2. Az egyik háromszög azonos, a másik ellentétes körüljárású lesz az eredetivel.

1037. A szerkesztés: ① Az AB oldalra $ADEF$ téglalapot szerkesztünk, amely egybevágó a megadottal, és a hosszabb oldala illeszkedik AB-re. ② B pontban merőlegest állítunk az AB egyenesre $\Rightarrow g$. ③ $\mathrm{e}(A; E) \cap g = E'$. ④ E' pontból merőlegest állítunk az AB egyenesre $\Rightarrow$ a merőleges talppontja D'. ⑤ $A = A'$, $B = B' \Rightarrow A'B'E'D'$ téglalap. ⑥ BC, illetve CA oldalra hasonlóan megszerkesztjük a téglalapot. Egyértelmű a megoldás.

1038. Felhasználjuk, hogy az α szög $g \| h$ szelőire a párhuzamos szelők tétele: $KP : PQ = KR : RS$. A szerkesztés: ① tetszőleges szög f szárán $KP = a$ és $PQ = b$. ② az α szög e szárán $KR = a'$. ③ P és R egyenese: g. ④ g-vel párhuzamos Q-n át: $\Rightarrow h$. ⑤ $h \cap e = S$. ⑥ $RS = b'$. Egyértelmű a megoldás.

1039. AB szakasz arányos osztása két részre, ha $AP : PB = m : n$. A szerkesztés: ① A kezdőpontú tetszőleges félegyenes: f. ② tetszőleges, azonos egységben f-en $AP' = m$ és $P'B' = n$. ③ $B'B$ egyenes: g. ④ g-vel párhuzamos egyenes P'-n át: h. ⑤ $AB \cap h = P$. *a)* $m = 2$ és $n = 3$. *b)* $m = 5$ és $n = 7$. *c)* $m = 1$ és $n = 2$, mert $2\frac{2}{3} : 5\frac{1}{3} = \frac{8}{3} : \frac{16}{3} = 1 : 2$.
AB szakasz arányos osztása három részre, ha $AP : PQ : QB = m : n : p$. A szerkesztés: ① az A kezdőpontú tetszőleges félegyenes: f. ② tetszőleges, azonos egységben f-en $AP' = m$, $P'Q' = n$

és $Q'B' = p$. ③ $B'B$ egyenes: g. ④ g-vel párhuzamos egyenes Q'-n, illetve P'-n át: h, illetve i. ⑤ $AB \cap h = Q$ és $AB \cap i = P$. *d)* $m = 2$ és $n = 3$ és $p = 4$. *e)* $m = 5$ és $n = 7$ és $p = 8$. *f)* $m = 1$ és $n = 2$ és $p = 6$, mert $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{3} : 4 = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : \frac{12}{3} = 1:2:6$.

1040. A háromszög oldalait segédegyenest alkalmazva osztjuk $m : n$ arányú részekre az 1039. feladat útmutatása szerint.

1041. $A_iB_i \| A_jB_j \Rightarrow$ az egyállású szögek egyenlők $\Rightarrow CA_iB_i\triangle \sim CA_1B_1\triangle$, ha $2 \le i \le 8$. $\Rightarrow$ megfelelő magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával $\Rightarrow \frac{A_8B_8}{A_1B_1} = \frac{1}{8} \Rightarrow A_8B_8 = 0{,}85\ \text{m}$. Hasonlóan: $A_7B_7 = 1{,}7$ m; $A_6B_6 = 2{,}55$ m; $A_5B_5 = 3{,}4$ m; $A_4B_4 = 4{,}25$ m; $A_3B_3 = 5{,}1$ m; $A_2B_2 = 5{,}95$ m. Az **1042.**, **1043.**, **1044.**, **1045.**, **1046.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.

1047. A szerkesztés: ① az A kezdőpontú e félegyenesen: AB; $BC_1 = BC$; $C_1A_1 = CA$. ② az A kezdőpontú f félegyenesre k hosszúságú szakasz $\Rightarrow AA_2$. ③ A_2A_1-gyel párhuzamos C_1-en át: c és A_2A_1-gyel párhuzamos B_1-en át: b. ④ $c \cap f = C_2$ és $b \cap f = B_2$. ⑤ AB_2; B_2C_2; C_2A_2 oldalú háromszög $\rightarrow A'B'C'\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1048. *a)* A szerkesztés: ① α; β szögű háromszög $\rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② A_0 kezdőpontú A_0B_0 félegyenesre $B_0C_1 = B_0C_0$; Ugyanazon a félegyenesen C_1-ből $C_1A_1 = C_0A_0 \Rightarrow A_0A_1$, az $A_0B_0C_0\triangle$ kerületével egyenlő szakasz. ③ A_0 kezdőpontú f félegyenesre $A_0A_2 = 2s = k$. ④ A_2A_1-gyel párhuzamos C_1-en át: c és A_2A_1-gyel párhuzamos B_1-en át: b. ⑤ $c \cap f = C_2$ és $b \cap f = B_2$. ⑥ A_0B_2; B_2C_2; C_2A_2 oldalú háromszög $\rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

b) A szerkesztés: ① α; β szögű háromszög $\rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② B_0 kezdőpontú A_0-t nem tartalmazó félegyenesre $B_0C_1 = B_0C_0$; ugyanazon a félegyenesen C_1-ből $C_1A_1 = C_0A_0$. $\Rightarrow B_0A_1$, az $A_0B_0C_0\triangle$ $a' + b'$ oldalával egyenlő szakasz. ③ B_0 kezdőpontú f félegyenesre $B_0A_2 = a + b$. ④ A_1A_2-vel párhuzamos C_1-en át: p. ⑤ $p \cap f = C_2$. ⑥ B_0C_2; C_2A_2; $180° - \alpha - \beta$ adatokból $\rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

c) A szerkesztés: ① α; β szögű háromszög $\rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② Legyen $A_1 \in C_0B_0$ olyan pont, amelyre $C_0A_1 = C_0A_0 \rightarrow B_0A_1 = a' - b'$. ③ A_1-n át f egyenes, azon B_2 pont, amelyre $A_1B_2 = a - b$. ④ B_0B_2-vel párhuzamos C_0-on át $\rightarrow g$. ⑤ $g \cap f = A_2$. ⑥ A_1A_2; A_2B_2; $\alpha \rightarrow ABC\triangle$. A megoldhatóság feltétele $\alpha > \beta$.

1049. *a)* A szerkesztés: ① α; $90° \rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② $A_0C_0 + C_0B_0 \rightarrow A_0B_1$ (A_0C_0 egyenesen). ③ A_0-on át f-re $(a + b) = A_0B_2$. ④ B_1B_2-vel párhuzamos C_0-on át $\rightarrow c$. ⑤ $c \cap f = C_2$. ⑥ A_0C_2; $90°$; $\alpha \rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

b) A szerkesztés: ① α; $90° \rightarrow A_0B_0C_0\triangle$. ② $A_0B_0 - A_0C_0 \rightarrow B_0B_1$ (A_0B_0 egyenesen). ③ B_0-on át f egyenes, $B_0B_2 = c - b$. ④ B_1B_2-vel párhuzamos A_0-on át $\rightarrow a$. ⑤ $a \cap f = A_2$. ⑥ B_0A_2; $90°$; $\alpha \rightarrow ABC\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1050. Ha két egyenlő szárú háromszög szárszöge egyenlő, akkor a háromszögek hasonlók. Ezért a szerkesztendő háromszöghöz hasonlót szerkesztünk, majd a megfelelő adata és az adott hosszúság közötti hasonlósági aránnyal megszerkesztjük a kívánt háromszöget. Egyértelmű a megoldás.

1051. *a)* A szerkesztés: ① Adott szakasz felmérése A kezdőpontú f félegyenesre $\rightarrow AD_2$. ② AB; $BD_1 = BD$ szakasz az A kezdőpontú e-re $\rightarrow AD_1$. ③ D_1D_2-vel párhuzamos B-n át $\Rightarrow b$. ④ $b \cap f = B_2$. ⑤ AB_2 oldalú négyzet. Egyértelmű a megoldás.

b) A szerkesztés: ① Adott szakasz felmérése B-n átmenő f egyenesre $\Rightarrow BC_2$. ② B-n átmenő e egyenes egyik félegyenesére BA, majd A-ból a B-t tartalmazó félegyenesre $AC_1 = AC$ szakasz $\rightarrow$ $\rightarrow C_1$ pont. ③ C_1C_2-vel párhuzamos A-n át $\Rightarrow a$. ④ $a \cap f = A_2$. ⑤ BA_2 oldalú négyzet a megoldás. Egyértelmű a megoldás.

1052. *a)* Bármely két négyzet hasonló, ezért tetszőleges négyzet átlójának és egyik oldalának összegére, valamint az adott szakaszra alkalmazzuk az 1051. *a)* feladatban látott szerkesztési eljárást.

b) Bármely két négyzet hasonló, ezért tetszőleges négyzet átlójának és egyik oldalának különbségére, valamint az adott szakaszra alkalmazzuk az 1051. *b)* feladatban látott szerkesztési eljárást.

I

Hasonló síkidomok beírása, levágása

1053. A szerkesztésnél felhasználjuk a párhuzamos szelők tételét.

1054. Kétféleképp rajzolhatunk egy oldalra kifelé az ABC háromszöggel egybevágó háromszöget: **1. eset:** AB egyenesre való tükrözéssel: $ABD_1\triangle$. Ekkor az $ABD_1\triangle$ C középpontú, 1/2 arányú hasonló képe az $A'B'D_1'\triangle$, ahol A' az AC felezőpontja, B' a BC felezőpontja és D_1' a C-ből induló magasság talppontja.
2. eset: AB szakasz felezőpontjára való tükrözéssel: $ABD_2\triangle$. Ekkor az $ABD_2\triangle$ C középpontú, 1/2 arányú hasonló képe az $A'B'D_2'\triangle$, ami az $ABC\triangle$ középvonal háromszöge. Egy adott csúcsból egy vagy két megoldás adódik.

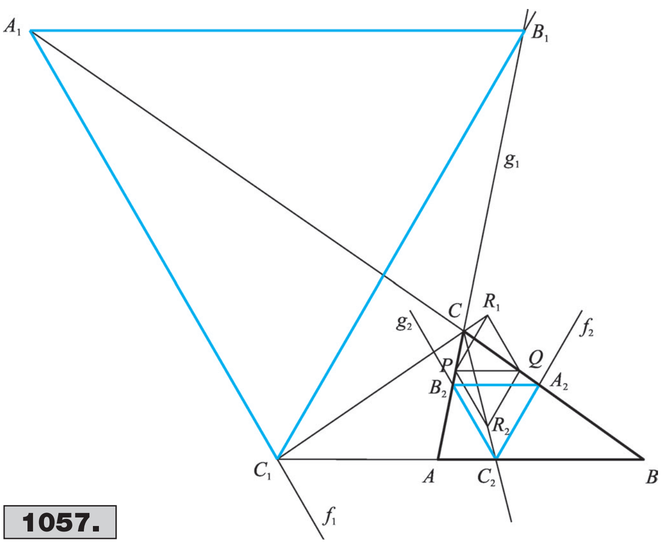
1055. Legyenek az egyenlő szárú háromszög csúcsai A, B és C, a szabályos háromszög csúcsai A, B és D. A szerkesztés: ① $e(A;B)\cap e(C;D)=D'$, ami az AB szakasz felezőpontja. ② D' ponton át párhuzamost húzunk az AD egyenessel $\Rightarrow e$. ③ D' ponton át párhuzamost húzunk a DB egyenessel $\Rightarrow f$. ④ $e\cap e(A;C)=A'$ és $f\cap e(B;C)=B'$. Egyértelmű a megoldás.

1056. C középpontú hasonlóság segítségével szerkesztünk. A szerkesztendő háromszög alappal szemközti D' csúcsa az átfogó belső pontja. A szerkesztés: ① Az átfogóra kifelé olyan egyenlő szárú $ABD\triangle$-et szerkesztünk, aminek a szára másfélszerese az átfogónak. ② $AB\cap e(C;D)=D'$. ③ D' ponton át párhuzamost húzunk az AD, illetve a BD egyenessel $\Rightarrow e$ és f. ④ $e\cap AC=A'$ és $f\cap BC=B'\Rightarrow A'D'B'\triangle$. Egyértelmű a megoldás.

1057. A szerkesztés: ① Legyen P az AC egyenes, Q a BC egyenes olyan tetszőleges pontja, hogy $PQ\parallel AB$ legyen. ② $PQR_1\triangle$ és $PQR_2\triangle$ szabályos háromszögek szerkesztése PQ szakaszra. ③ $e(C;R_2)\cap e(A;B)=C_2$ és $e(C;R_1)\cap e(A;B)=C_1$. ④ C_i ponton át párhuzamost húzunk R_iQ egyenessel $\Rightarrow f_i$ és C_i ponton át párhuzamost húzunk R_iP egyenessel $\Rightarrow g_i$. ⑤ $f_i\cap e(C;B)=A_i$ és $g_i\cap e(A;C)=B_i$. Egy vagy két megoldás lehet.

1058. Felhasználjuk, hogy $ABCD\sim PQDA$ esetén $BDA\triangle\sim AQD\triangle\Rightarrow$ szögeik egyenlők, azaz $DAQ\sphericalangle=ABD\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek $\Rightarrow BD$ átló merőleges AQ átlóra. A szerkesztés: ① BD átlóra merőlegest állítunk az A csúcsból $\Rightarrow m$. ② $m\cap e(D;C)=Q$. ③ Q pontban merőlegest állítunk a DC egyenesre $\Rightarrow e$ a keresett egyenes. ④ Az e egyenest az AB szakasz felezőmerőlegesére tükrözve másik megoldást kaphatunk. Egy vagy két megoldás lehet.

1059. Felhasználjuk, hogy $ABCD\sim PQCD$ esetén $BC:AB=PQ:PD=AB:PD$. A szerkesztés: ① CB félegyenesre B ponton túl AB szakaszt mérünk $\Rightarrow$ $\Rightarrow E$. ② C pontból tetszőleges félegyenest húzunk $\Rightarrow f$. ③ C pontból f egyenesre AB szakaszt mérünk $\Rightarrow B'$. ④ E ponton át párhuzamost húzunk a BB' egyenessel $\Rightarrow e$; $e\cap f=A'$. ⑤ D pontból DA egyenesre $B'A'$ szakaszt mérünk $\Rightarrow P$. ⑥ P ponton át párhuzamost húzunk a CD egyenessel $\Rightarrow g$; $g\cap e(C;E)=Q$. A DC oldalhoz kifelé a $PQBA$ paralelogrammával egybevágó paralelogrammát illesztve másik megoldást kapunk.



1057.

1060. Felhasználjuk, hogy $ABC\triangle\sim DAC\triangle$ esetén a megfelelő szögek egyenlők. $\alpha>\beta$ esetén az A csúcsban az AC oldalra β szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese e_1. $\gamma > \beta$ esetén hasonlóan adódik az e_2 megoldás. A megoldások száma 2 vagy 0.

1061. **1. eset:** $\alpha > \beta$, $\alpha > \gamma$. Felhasználjuk, hogy $ABC\triangle \sim DBC\triangle$ esetén a megfelelő szögek egyenlők. A szerkesztés: ① A B csúcsban a BC oldalra α szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese f. ② A C csúcsban a BC oldalra α szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese g. ③ $f \cap \mathrm{e}(C; A) = D_1$ és $g \cap \mathrm{e}(A; B) = D_2$.

2. eset: $\alpha < \beta$, $\alpha < \gamma$. Felhasználjuk, hogy $ABC\triangle \sim D_1CA\triangle \sim D_2BA\triangle$ esetén a megfelelő szögek egyenlők. A szerkesztés: ① Az A csúcsban az AC oldalra β szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese h. ② Az A csúcsban az AB oldalra γ szöget szerkesztünk $\Rightarrow$ az új szögszár egyenese i. ③ $h \cap \mathrm{e}(B; C) = D_1$ és $i \cap \mathrm{e}(B; C) = D_2$.

3. eset: $\alpha = \beta = \gamma$ esetén nincs megoldás. A megoldások száma 4, 2 vagy 0.

1062. Felhasználjuk, hogy a $P'Q'R'S'$ négyzet hasonló a szerkesztendő $PQRS$ négyzethez, a hasonlóság középpontja B. A szerkesztés: ① A BC oldal tetszőleges P' pontjában a BC-re állított merőleges egyenes és az AB oldal metszéspontja S'. ② A BC egyenesen nyugvó $S'P'$ oldalhosszúságú négyzet $\Rightarrow S'P'Q'R'$ négyzet. ③ $\mathrm{e}(B; R') \cap \mathrm{e}(A;C) = R$. ④ Az R ponton át BC-re állított merőleges egyenes $\Rightarrow m$; $m \cap \mathrm{e}(B; C) = Q$. ⑤ Az R ponton át húzott SR-rel párhuzamos egyenes $\Rightarrow$ $\Rightarrow n$; $n \cap \mathrm{e}(A; B) = S$. ⑥ Az S ponton át BC-re állított merőleges egyenes $\Rightarrow p$; $p \cap \mathrm{e}(B; C) = P$. Hasonlóan szerkeszthető a másik két oldalegyenesen nyugvó négyzet. Három megoldás van.

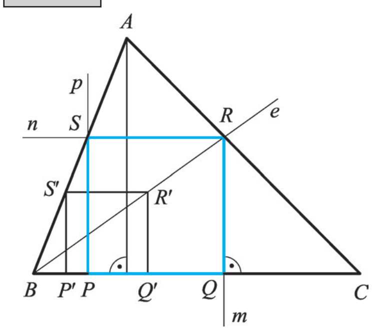
1063. B középpontú hasonlóságot alkalmazunk. A szerkesztés: ① A BC oldal tetszőleges P' pontjában a BC-re állított merőleges egyenes és az AB oldal metszéspontja S'. ② $S'P' : P'Q' = 2:3$ és $Q' \in \mathrm{e}(B; C) \Rightarrow S'P'Q'R'$ téglalap. ③ $\mathrm{e}(B; R') \cap \mathrm{e}(A; C) = R_1$. ④ Az R_1 ponton át BC-re állított merőleges egyenes talppontja Q_1. ⑤ Az R_1 ponton át BC-vel húzott párhuzamos egyenes és AB egyenes metszéspontja S_1. ⑥ Az S_1 ponton át BC-re állított merőleges egyenes talppontja $P_1 \Rightarrow P_1Q_1R_1S_1$ téglalap. ⑦ Az előző lépéseket végezzük $S''P'' : P''Q'' = 3:2$ kiindulással $\Rightarrow P_2Q_2R_2S_2$ téglalap. Hasonlóan szerkeszthető a másik két oldalegyenesen nyugvó két-két téglalap. Hat megoldás van.

1064. A szerkesztés: ① A három adott iránnyal párhuzamos oldalú háromszög $\Rightarrow PQR\triangle$. ② $PQR\triangle$ köré írt köre és középpontja $\Rightarrow l$, K. ③ Az O pontból induló KP-vel, KQ-val, KR-rel egyirányú sugarak kimetszik a k körből az A, B, C pontokat. ④ Az $ABC\triangle$ O pontra vonatkozó tükörképe, $DEF\triangle$ is megoldás. Két megoldás van.

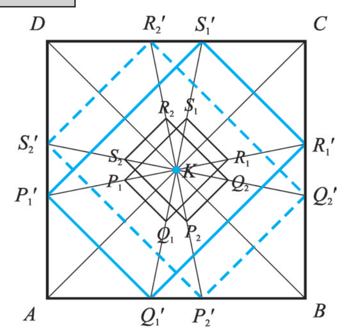
1065. A szerkesztés: ① DB átlón nyugvó, AC átlóval párhuzamos oldalú rombusz $\Rightarrow DBFE$. ② A középpontú hasonlóságot alkalmazunk: az E pont képe $R \in DC$, illetve az F pont képe $Q \in BC$. ③ Az R ponton átmenő AC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja AD szakasszal $\Rightarrow$ S. ④ A Q ponton átmenő AC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja AB szakasszal $\Rightarrow P$. Egyértelmű a megoldás.

1066. A szerkesztés: ① Az $ABCD$ négyzet középpontja $\Rightarrow K$. ② K középpontú AC, illetve BD szimmetriatengelyű, $EFGH$ téglalaphoz hasonló téglalapok szerkesztése $\Rightarrow P_1Q_1R_1S_1$ és $P_2Q_2R_2S_2$. ③ Olyan K középpontú hasonlóságot alkalmazunk, amelynél a fenti két téglalap csú-

1062.

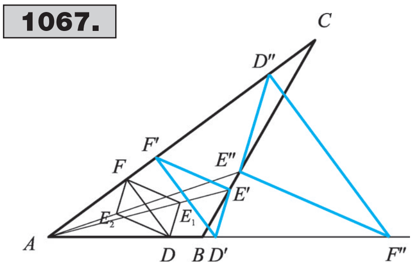


1066.

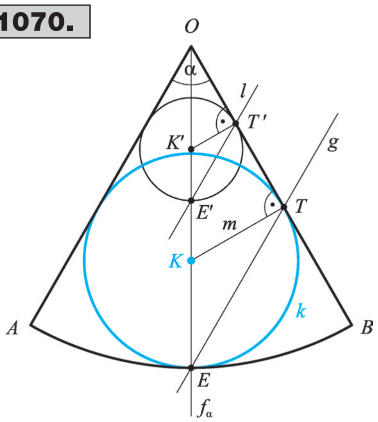


I

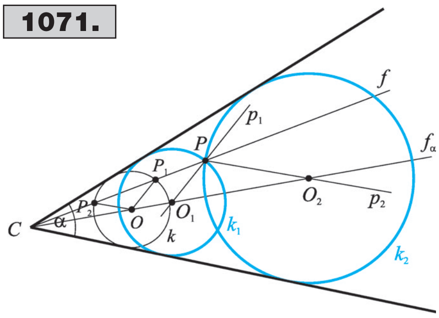
1067.



1070.



1071.



csainak képe a négyzet oldalaira esik ⇒ $P_1'Q_1'R_1'S_1'$ és $P_2'Q_2'R_2'S_2'$ téglalap. Végtelen sok megoldás van, ha *EFGH* négyszög négyzet, két megoldás van egyébként.

1067. A szerkesztés: ① Legyen *F* az *AC* egyenes, *D* az *AB* egyenes olyan pontja, hogy $FD \parallel XZ$ teljesüljön. ② Az *F* ponton át *ZY* egyenessel párhuzamost húzunk ⇒ *a,* az *F* ponton át *XY* egyenessel párhuzamost húzunk ⇒ *b,* a *D* ponton át *XY* egyenessel párhuzamost húzunk ⇒ *c*, a *D* ponton át *YZ* egyenessel párhuzamost húzunk ⇒ *d.* ③ $a \cap c = E_1$ és $b \cap d = E_2$. ④ $e(A;\ E_1) \cap e(B;\ C) = E'$ és $e(A;\ E_2) \cap e(B;\ C) = E''$. ⑤ AE': AE_1 arányú *A* középpontú hasonlósággal ⇒ D', F'. ⑥ AE'': AE_2 arányú *A* középpontú hasonlósággal ⇒ D'', F''. Ha a kiindulási szakasz végpontjai a β vagy a γ szög száraira illeszkednek, újabb két-két megoldást kapunk.

1068. A szerkesztés: ① Legyen az *AOB* szög szögfelezője f_α és P' az *OA* sugár, S' az *OB* sugár olyan pontja, hogy $P'S' \perp f_\alpha$ teljesüljön. ② $P'S'$ oldalú négyzet ⇒ $Q'R'S'P'$. ③ OQ', illetve OR' egyenes metszéspontja az *AB* ívvel ⇒ *Q*, illetve *R* pont. ④ A *Q*, illetve az *R* pontokban a *QR* szakaszra állított merőlegesek metszéspontja a szögszárakkal ⇒ ⇒ *P*, illetve *S*. Egyértelmű a megoldás.

1069. A szerkesztés: ① Az *AB* szakasz felezőpontja és felezőmerőlegese ⇒ F_{AB} és f_{AB}. ② Legyenek P' és Q' az *AB* határoló húr tetszőleges f_{AB} egyenesre szimmetrikus pontjai. ③ $P'Q'$ oldalú négyzet ⇒ $R'S'P'Q'$. ④ $e(F_{AB};\ R') \cap k = R$ és $e(F_{AB};\ S') \cap k = S$. ⑤ Az *R*, illetve az *S* pontokból az *AB* szakaszra állított merőlegesek talppontja ⇒ *Q*, illetve *P*. Egyértelmű a megoldás.

1070. A szerkesztés: ① Az *AOB* szög szárait érintő tetszőleges kör: *l*, az *AOB* szög szögfelezője: f_α. ② $f_\alpha \cap l = E'$ az *O* ponttól távolabbi metszéspont. ③ Az *l* kör és a szögszár érintési pontja: T'. ④ Az *E* ponton át $E'T'$-vel párhuzamos egyenest húzunk ⇒ ⇒ *g;* $g \cap OB = T$. ⑤ A *T* pontban *OB*-re merőleges egyenest állítunk ⇒ *m;* $m \cap f_\alpha = K$. ⑥ *K* középpontú *KT* sugarú kör ⇒ *k*. Egyértelmű a megoldás.

1071. A szerkesztés: ① A szögszárakat érintő tetszőleges sugarú kör: *k* (középpontja *O*), a szögfelező: f_α. ② $e(C;\ P) \cap k = \{P_1;\ P_2\}$. ③ *P* ponton át P_1O-val, illetve P_2O-val párhuzamos egyenest húzunk ⇒ p_1 és p_2. ④ $f_\alpha \cap p_1 = O_1$ és $f_\alpha \cap p_2 = O_2$. ⑤ O_i középpontú PO_i sugarú kör ⇒ k_i. Két megoldás van.

1072. Mivel a keresett *Q* pontra $d(Q;\ P) = d(Q;\ e)$, ezért *Q* a *P* ponton átmenő, *e* egyenest érintő kör középpontja. A szerkesztés: ① Az *e* egyenes *f* egyenesre vonatkozó tükörképe ⇒ e'. ② Az *e* és e' egyeneseket érintő, *P* ponton átmenő körök középpontja ⇒ Q_1, Q_2 (a szerkesztés az 1071. feladat megoldásában leírtak szerint történhet). A megoldások száma 2, 1 vagy 0 lehet.

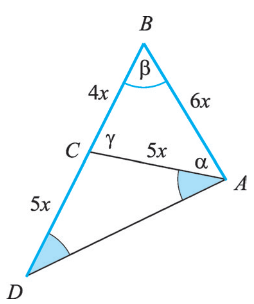
Megjegyzés: A keresett pontok az *e* vezéregyenesű *P* fókuszú parabolának az *f* egyenessel közös pontjai.

Hasonló háromszögek

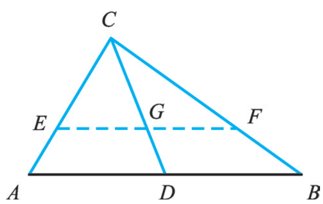
Bizonyítási feladatok

1073. *a)* Például a 40°, 70°, 70° és a 100°, 40°, 40° szögű háromszögek nem hasonlók, bár van egyenlő szögük. *b)* Ha az állítás igaz volna, akkor minden egyenlő szárú háromszög hasonló lenne szárszögétől függetlenül.
1074. Például a 4 cm, 6 cm, 8 cm és a 2 cm, 3 cm, 4 cm oldalú háromszögek nem egybevágók, bár megfelelő oldalaik aránya egyenlő és mindkettőnek van 4 cm-es oldala.
1075. *a)* Mivel $\underline{\gamma = \gamma'}$, f és f' szögfelező, ezért $DCB\sphericalangle = D'C'B'\sphericalangle = \gamma/2$ és $f : f' = a : a' \Rightarrow$ $\Rightarrow DCB\triangle \sim D'C'B'\triangle \Rightarrow \underline{\beta = \beta'}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$. *b)* Legyen az AB, illetve az $A'B'$ oldal felezőpontja E, illetve E'. Tükrözzük C csúcsot az E, C' csúcsot az E' pontra $\Rightarrow D$, illetve D'. Mivel $a : b : s = a' : b' : s'$, ezért $a : b : 2s = a' : b' : 2s' \Rightarrow CDB\triangle \sim C'D'B'\triangle \Rightarrow CBD\sphericalangle =$ $= C'B'D'\sphericalangle \Rightarrow ACB\sphericalangle = A'C'B'\sphericalangle \Rightarrow ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$, mert két oldaluk aránya és az azok által közrezárt szög egyenlő.
1076. $ATC\triangle \sim A'T'C'\triangle$, mert szögeik $\varepsilon = \varepsilon'$ és $90° \Rightarrow \underline{\alpha = \alpha'}$. $BTC\triangle \sim B'T'C'\triangle$, mert szögeik $\varphi = \varphi'$ és $90° \Rightarrow \alpha = \alpha' \Rightarrow \underline{\beta = \beta'}. \Rightarrow ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$, mert szögeik egyenlők.
1077. $BC : CA : AB = 4 : 5 : 6 \Rightarrow \alpha < \beta < \gamma$. BC oldal C-n túli meghosszabbítására mérjük fel az AC oldal hosszát: $CD = AC \Rightarrow CDA\sphericalangle = CAD\sphericalangle$. $ABC\triangle \sim DBA\triangle$, mert $BA : BD = 6 : 9 =$ $= 4 : 6 = BC : AB$ és β közös $\Rightarrow BDA\sphericalangle = \alpha$, tehát $\gamma = 2\alpha$, mert γ külső szöge $ACD\triangle$-nek.
1078. Például egy négyzet és egy nem egyenlő oldalú téglalap nem hasonló négyszögek, bár szögeik páronként egyenlők.
Az **1079.**, **1080.**, **1081.**, **1082.**, **1083.**, **1084.** feladat megoldását az olvasóra bízzuk.
1085. $EF \parallel AB \Rightarrow EG \parallel AD$ és $FG \parallel BD$.
Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ACD\sphericalangle$-re: $\dfrac{EG}{AD} = \dfrac{CG}{CD}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $BCD\sphericalangle$-re: $\dfrac{FG}{BD} = \dfrac{CG}{CD}$. A fentiekből következik: $\dfrac{EG}{AD} = \dfrac{FG}{BD}$. CD súlyvonal. $\Rightarrow AD = DB \Rightarrow EG = FG$, tehát a súlyvonal felezi az EF szakaszt.
1086. A szimmetrikus trapéz húrtrapéz vagy paralelogramma is lehet. Az ábrán vázolt négy szimmetrikus trapéz egyike sem hasonló a másikhoz, bár szögeik egyenlők.

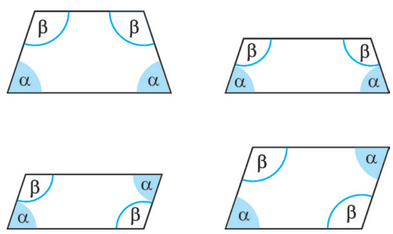
1077.



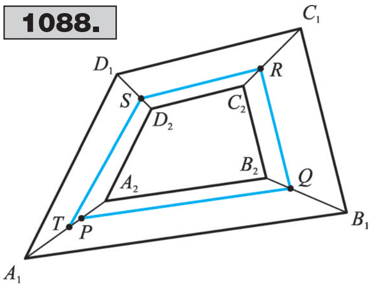
1085.



1086.



1088.



1087. **1. eset:** $ABCD$ nem paralelogramma. Tekintsük az $ABCD$ trapéz kiegészítő háromszögét, $DCO\triangle$-et! $AOB\measuredangle$-re alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét:
$$\frac{OD}{OC}=\frac{DP}{CQ}=\frac{PA}{QB}\Rightarrow DP:PA=CQ:QB.$$
2. eset: $ABCD$ paralelogramma, ekkor $DP=CQ$ és $PA=$ $=QB\Rightarrow DP:PA=CQ:QB.$

1088. Az 1087. feladatban láttuk, hogy $A_1B_1\|A_2B_2\|PQ\Rightarrow$ $\Rightarrow A_1P:PA_2=B_1Q:QB_2$ és $B_1C_1\|B_2C_2\|QR\Rightarrow B_1Q:QB_2=$ $=C_1R:RC_2$ és $C_1D_1\|C_2D_2\|RS\Rightarrow C_1R:RC_2=D_1S:SD_2$ és $D_1A_1\|D_2A_2\|ST\Rightarrow D_1S:SD_2=$ $=A_1T:TA_2\Rightarrow A_1P:PA_2=A_1T:TA_2\Rightarrow P\equiv T.$

Számolási feladatok

1089. $b'=1\,\text{cm}$ és $c'=1{,}2\,\text{cm}$. **1090.** $b'=5{,}6\,\text{cm}$, $c'=3{,}5\,\text{cm}$.

1091. $b'=\frac{3}{4}\,\text{cm}$ és $a'=\frac{9}{16}\,\text{cm}$. **1092.** $b'=13{,}6\,\text{cm}$.

1093. Az árnyékok hossza: $a=35{,}8\,\text{m}$ és $b=1{,}62\,\text{m}$. A kémény magassága c, a karó magassága $d=1{,}9\,\text{m}$. $\lambda=\frac{b}{a}=\frac{1{,}62}{35{,}8}=\frac{d}{c}\Rightarrow c=\frac{d}{\lambda}=1{,}9:\frac{1{,}62}{35{,}8}\approx 42\,\text{m}$ magas a kémény.

1094. $a=5\,\text{m}, b=3{,}8\,\text{m}, a'=2\,\text{cm}.\ \frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b'}{2}=\frac{380}{500}\Rightarrow b'=1{,}52\,\text{cm}$ a szélesség a tervrajzon.

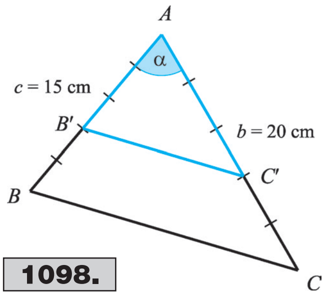
1095. $a'=\frac{9}{2}\,\text{cm}$; $b'=6\,\text{cm}$ és $c'=\frac{15}{2}\,\text{cm}$. **1096.** $a'=10\,\text{m}$, $b'=20\,\text{m}$, $c'=25\,\text{m}$.

1097. $a'=1\,\text{m},\ b'=2\,\text{m},\ c'=2{,}5\,\text{m}$.

1098. $B'AC'\measuredangle=BAC\measuredangle=\alpha.\quad \frac{AB'}{AB}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ és $\frac{AC'}{AC}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{AB'}{AC}=\frac{AC'}{AC}.\Rightarrow$ $\Rightarrow ABC\triangle\sim AB'C'\triangle$, mert két oldaluk aránya és azok közrezárt szöge egyenlő.

1099. $a=\frac{13}{2}\,\text{m}$ és $a'=\frac{11}{2}\,\text{m}$.

1100. $ABC\triangle\sim A_1B_1C_1\triangle$, mert két oldaluk aránya és azok közrezárt szöge egyenlő $\Rightarrow b=3\,\text{cm}$ és $b_1=1{,}2\,\text{cm}$.



1098.

1101. *a)* $b'=35\,\text{cm}$ és $c=8\,\text{cm}$. *b)* $c=20\,\text{cm}$ és $c'=12\,\text{cm}$.

1102. Vizsgáljuk a leghosszabb, a legrövidebb és a közbülső oldalak arányát!

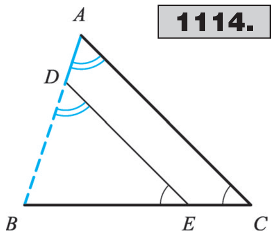
a) $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{1}{10}\Rightarrow$ Hasonlók a háromszögek.

b) $\frac{b'}{a}=\frac{a'}{c}=\frac{c'}{b}=\frac{4}{5}\Rightarrow$ Hasonlók a háromszögek, megfelelő oldalaik a és b', c és a', b és c'.

c) $\frac{b'}{a}=\frac{9}{10}\neq\frac{a'}{c}=\frac{c'}{b}=\frac{4}{5}\Rightarrow$ Nem hasonlók a háromszögek.

1103. $a' = 0{,}8\text{ cm},\ b' = 1{,}2\text{ cm},\ c' = 1{,}6\text{ cm}.$
1104. $a_1' = 8$ cm, $a_2' = 12$ cm, $a_3' = 16$ cm, $a_4' = 20$ cm.
1105. $a_1' = 18$ cm, $a_2' = 9$ cm, $a_3' = 12$ cm, $a_4' = 36$ cm.
1106. Az oldalak: 30 cm, 24 cm, 18 cm, 36 cm.
1107. $k = 100$ mm és $k' = 40$ mm.
1108. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ és $\frac{a}{a+b} = \frac{e}{f} = \frac{c}{c+d}$. A harmadik oszlop adataival: $\frac{c}{c+4} = \frac{7}{10} \Rightarrow c = \frac{28}{3}$ cm; $\frac{a}{5} = \frac{\frac{28}{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{35}{3}$ cm. A táblázat hiányzó adatai: az első oszlopban: $d = \frac{36}{7}$ cm és $f = \frac{66}{7}$ cm, a második oszlopban: $b = \frac{60}{11}$ cm és $f = \frac{136}{11}$ cm, a harmadik oszlopban: $a = \frac{35}{3}$ cm és $c = \frac{28}{3}$ cm, a negyedik oszlopban: $b = \frac{30}{11}$ cm és $e = \frac{99}{14}$ cm.
1109. Legyen R a közös kiindulási pont. A_1, B_1 pontokba jutnak fél óra alatt: $A_1B_1 = 180$ km. $A_1R : A_2R = B_1R : B_2R$; a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. A párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva az $A_2RB_2\sphericalangle$ szelőire: $A_2B_2 : A_1B_1 = \frac{5}{4} : \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow A_2B_2 = \frac{5}{2} \cdot 180 = 450$ km. Általánosan: $l \cdot 360$ km a távolságuk l óra múlva.
1110. A keresett ponthalmaz egy, az e egyenessel párhuzamos egyenes, ami e-nek P középpontú λ arányú középpontos hasonló képe. *a)* $\lambda_1 = \frac{1}{3}$; $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. *b)* $\lambda_3 = \frac{2}{5}$; $\lambda_4 = \frac{m}{m+n}$.
1111. A $BC = a$ alapú m_a magasságú háromszögek A csúcsa a BC-vel párhuzamos, m_a távolságra levő párhuzamos egyenespáron van. S súlypont $\Rightarrow SA = \frac{2}{3} FA \Rightarrow S$ pont az F pontnak A középpontú $\lambda = \frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonló képe $\Rightarrow$ A keresett ponthalmazt a BC egyenessel párhuzamos egyenesek pontjai alkotják, amelyek $\frac{m_a}{3}$ távolságra vannak a BC egyenestől.
1112. Jelölje az egyik oldalon a létra csúcsát C, a lánc végeit D, E, a szárak talajon levő pontjait A, B. $CDE\triangle \sim CAB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. Magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával. $CDE\triangle$ magassága: $m = 1{,}4$ és $CAB\triangle$ magassága: $h = 2$.
$\frac{m}{h} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \underline{\underline{DE = 0{,}7\text{ m} = 70\text{ cm}}}.$
1113. Jelölje A a pálya belátható pontját, B a kerítés talapzatát, K a legfelső pontját, NM a ház alapjától a legalacsonyabb keresett pontig terjedő szakaszát. $ABK\triangle \sim ANM\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\frac{KB}{AB} = \frac{MN}{AN} \Rightarrow MN = 22\text{ m} \Rightarrow$ A nyolcadik szinttől kezdve, azaz a 7., 8., 9., 10. emeletről lehet belátni a pályára.

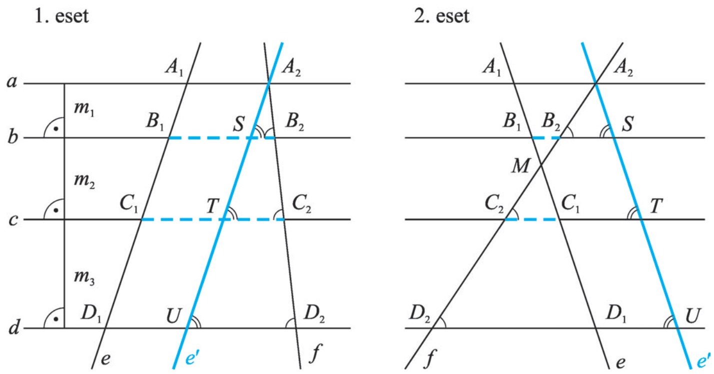
1114.



1114. Az ábrán azonosan jelölt egyállású szögek egyenlők. $\Rightarrow$
$\Rightarrow BED\triangle \sim BCA\triangle \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$.
a) $BD = 12$ cm és $\underline{\underline{AD}} = AB - BD = \underline{\underline{4\text{ cm}}}$.
b) $\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BD} = \frac{AD + BD}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}$.

I

1115.



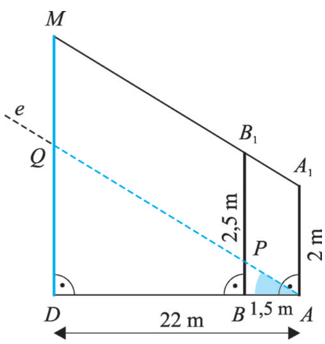
1115. $a \parallel b \parallel c \parallel d$; $d(a;\, b) : d(b;\, c) : d(c;\, d) = m_1 : m_2 : m_3 = 2:3:4$. e és f metsző egyenesek A_i; B_i; C_i; D_i pontokban metszik a párhuzamosokat. $A_1A_2 = 60$ cm és $D_1D_2 = 96$ cm. Húzzunk e egyenessel párhuzamost az A_2 ponton át: e' és $A_1A_2 = B_1S = C_1T = D_1U = 60$ cm. Az ábrán azonosan jelölt egyállású szögek egyenlők, ezért $A_2B_2S\triangle \sim A_2D_2U\triangle$ és $A_2C_2T\triangle \sim A_2D_2U\triangle \Rightarrow$ magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával. $A_2B_2S\triangle$ magassága: m_1 és $A_2D_2U\triangle$ magassága: $m_1 + m_2 + m_3$ és $A_2C_2T\triangle$ magassága: $m_1 + m_2 \Rightarrow \dfrac{B_2S}{D_2U} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow B_2S = \dfrac{2}{9} D_2U$ és $\dfrac{C_2T}{D_2U} = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow C_2T = \dfrac{5}{9} D_2U$.

1. eset: $D_2U = D_1D_2 - D_1U = 36$ cm $\Rightarrow B_2S = 8$ cm és $C_2T = 20$ cm $\Rightarrow B_1S + B_2S = B_1B_2 = 68$ cm és $C_1T + C_2T = C_1C_2 = 80$ cm.

2. eset: $A_1M : MD_1 = 5:8 \Rightarrow e$ és f a b és c párhuzamosok között metszi egymást. $D_2U = D_1D_2 + D_1U = 156$ cm $\Rightarrow B_2S = \dfrac{104}{3}$ cm és $C_2T = \dfrac{260}{3}$ cm $\Rightarrow B_1S - B_2S = B_1B_2 = \dfrac{76}{3}$ cm és $C_2T - C_1T = C_1C_2 = \dfrac{80}{3}$ cm.

1116. Húzzunk MA_1-gyel párhuzamos egyenest A-n át: e. Az e által kimetszett P, Q pontokra $AA_1 = B_1P = MQ = 2$; $PB = 0{,}5$. $PB \parallel DQ \Rightarrow DAQ\sphericalangle$-re alkalmazhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét: $\dfrac{DQ}{PB} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow DQ = \dfrac{22}{3} \Rightarrow MD = DQ + QM = \dfrac{28}{3}$, tehát a fa körülbelül 9,3 m magas.

1116.



1117. $ABCD \sim ADQP \Rightarrow \dfrac{AP}{AD} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AP = AD^2 \cdot \dfrac{1}{AB} \Rightarrow$ $\Rightarrow AP = 4^2 \cdot \dfrac{1}{7} = \dfrac{16}{7}$. Az új paralelogramma oldalai $\underline{\underline{\dfrac{16}{7}}}$ cm és $\underline{\underline{4\,\text{cm}}}$.

1118. $ABCD \sim ADFE$ és k középvonal $\Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AD}{\frac{1}{2}AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2}AB^2 = AD^2 \Rightarrow \underline{\underline{\dfrac{AB}{AD} = \sqrt{2}}}$.

1119. Legyenek $P \in BC$, $Q \in AC$ és $R \in AB$ a paralelogramma csúcsai. $BP : QP = 6 : 5 = y : x$ és $PCQ\triangle \sim BCA\triangle$, mert szögeik egyállású szögek $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{QP}{BA} = \dfrac{PC}{BC} \Rightarrow \dfrac{QP}{25} = \dfrac{20 - BP}{20}$ és $BP = \dfrac{6}{5} QP \Rightarrow QP = 10$ cm és $BP = 12$ cm.

1120. Legyenek P_1, $Q_1 \in BC$, $R_1 \in AC$, $S_1 \in AB$ a téglalap csúcsai.
B pontot $\overrightarrow{S_1R_1}$ vektorral eltolva B' pont adódik. $B'C = BC - P_1Q_1$ és $B'CR_1\triangle \sim BCA\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow \dfrac{R_1Q_1}{m_a} = \dfrac{B'C}{BC} = \dfrac{BC - P_1Q_1}{BC}$.

1. eset: $R_1Q_1 : P_1Q_1 = 5 : 9 \Rightarrow \dfrac{R_1Q_1}{16} = \dfrac{48 - \frac{9}{5}R_1Q_1}{48} \Rightarrow \underline{\underline{R_1Q_1 = 10\text{ cm}}}$ és $\underline{\underline{P_1Q_1 = 18\text{ cm}}}$.

2. eset: $R_1Q_1 : P_1Q_1 = 9 : 5 \Rightarrow \dfrac{R_1Q_1}{16} = \dfrac{48 - \frac{5}{9}R_1Q_1}{48} \Rightarrow \underline{\underline{R_1Q_1 = \dfrac{27}{2}\text{ cm}}}$ $\underline{\underline{P_1Q_1 = \dfrac{15}{2}\text{ cm}}}$.

1121. $S_1R_1A\triangle \sim BCA\triangle$, mert szögeik egyállású szögek $\Rightarrow \dfrac{y}{a} = \dfrac{h - x}{h}$.

1. eset: $x : y = m : n \Rightarrow \dfrac{\frac{n}{m}x}{a} = \dfrac{h - x}{h} \Rightarrow \underline{\underline{x = \dfrac{ahm}{am + nh}}}$ $y = \dfrac{ahn}{am + nh}$.

2. eset: $x : y = n : m \Rightarrow \dfrac{\frac{m}{n}x}{a} = \dfrac{h - x}{h} \Rightarrow \underline{\underline{x = \dfrac{ahn}{an + mh}}}$ $y = \dfrac{ahm}{an + mh}$. Megjegyzés: adott oldalarányú, háromszögbe írt téglalapot szerkesztettünk az 1063. feladatban.

1122. $SRA\triangle \sim BCA\triangle$, mert szögeik egyállású szögek $\Rightarrow$ megfelelő szakaszaik aránya egyenlő $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{x}{h - x} = \dfrac{a}{h} \Rightarrow \underline{\underline{x = \dfrac{ah}{a + h}}}$, azaz $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{h}$.

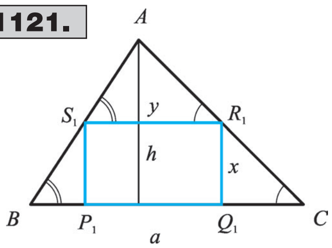
1123. $ABC\triangle \sim DAC\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $\dfrac{DC}{CA} = \dfrac{CA}{CB} \Rightarrow DC = \dfrac{CA^2}{CB} = \dfrac{6 \cdot 6}{12} \Rightarrow DC = 3$ cm és $BD = BC - DC = 9$ cm.

1124. $ABC\triangle \sim ADB\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD = c^2$.

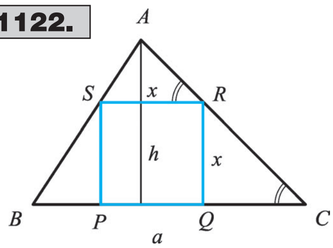
1. eset: $AD : DC = 9 : 7 \Rightarrow c^2 = (9 + 7) \cdot 9$, $\underline{\underline{c = 12\text{ cm}}}$ és $\underline{\underline{BD : BC = 9 : 12 = 3 : 4}}$.

2. eset: $AD : DC = 7 : 9 \Rightarrow c^2 = (7 + 9) \cdot 7$, $\underline{\underline{c = 4\sqrt{7}\text{ cm}}}$ és $\underline{\underline{BD : BC = \sqrt{7} : 4}}$.

1121.



1122.



I

1125. $DC = |AC - AD|$, mert $c < b$ esetén $\gamma < \beta \Rightarrow D$ az AC szakasz belső pontja, ekkor $DC = AC - AD$; $c > b$ esetén $\gamma > \beta \Rightarrow D$ az AC egyenes C-n túli pontja, ekkor $DC = AD - AC$. $ABC\triangle \sim ADB\triangle$, mert szögeik egyenlők $\Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő, azaz $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC}$. *a)* $c = 2$ cm $< b = 4$ cm $\Rightarrow AD = \frac{2^2}{4} \Rightarrow$ $AD = 1$ cm és $DC = 3$ cm. *b)* $AD = \frac{c^2}{b}$ és $DC = \left|b - \frac{c^2}{b}\right|$.

1126. $K_1P_1E\sphericalangle = K_1EP_1\sphericalangle = K_2EP_2\sphericalangle = K_2P_2E\sphericalangle$, mert $K_1P_1E\triangle$ és $K_2P_2E\triangle$ egyenlő szárú, illetve $K_1EP_1\sphericalangle$ és $K_2EP_2\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow K_1P_1E\triangle \sim K_2P_2E\triangle \Rightarrow P_1E : P_2E = K_1E : K_2E = r_1 : r_2$. *a)* $r_1 + r_2 = 36$ cm és $r_1 : r_2 = 13 : 5 \Rightarrow$ $r_1 = 26$ cm és $r_2 = 10$ cm. *b)* $r_1 + r_2 = d$ és $r_1 : r_2 = a : b \Rightarrow$ $\Rightarrow r_1 = \frac{ad}{a+b}$ és $r_2 = \frac{bd}{a+b}$.

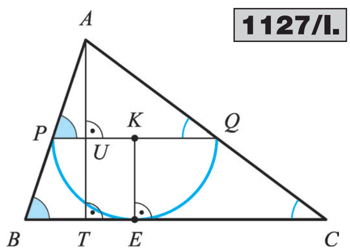
1127. $PQ \parallel BC \Rightarrow$ az azonosan jelölt egyállású szögek egyenlők $\Rightarrow APQ\triangle \sim ABC\triangle \Rightarrow$ magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával, azaz $\frac{PQ}{BC} = \frac{AU}{AT} \Rightarrow \frac{2r}{a} = \frac{h - r}{h} \Rightarrow r = \frac{ah}{2h + a}$.

1128. $PQ \parallel BC \Rightarrow APQ\triangle \sim ABC\triangle \Rightarrow$ magasságaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával, azaz $\frac{PQ}{BC} = \frac{m_a - KR}{m_a} \Rightarrow \frac{2KR}{30} = \frac{10 - KR}{10} \Rightarrow KR = 6$ cm $\Rightarrow$ a $PQR\triangle$ oldalai 12 cm, $6\sqrt{2}$ cm és $6\sqrt{2}$ cm.

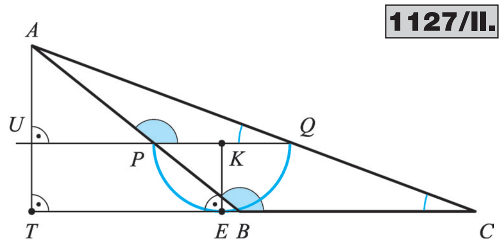
1129. $PQ \parallel AB \Rightarrow$ az egyállású szögek egyenlők $\Rightarrow CQP\triangle \sim CAB\triangle \Rightarrow$ oldalaik aránya egyenlő a hasonlóság arányával, azaz $\frac{QP}{AB} = \frac{CQ}{CA} \Rightarrow \frac{AQ}{c} = \frac{b - AQ}{b} \Rightarrow$ a rombusz oldala $AQ = \frac{cb}{c + b}$.

1130. Az N ponton átmenő AB-vel párhuzamos egyenes az AC oldalt L pontban metszi $\Rightarrow$ $\Rightarrow MNLA$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow BN = AM = NL \Rightarrow BNL\triangle$ egyenlő szárú, az alapon fekvő szögeinek nagysága $\beta/2 \Rightarrow BL$ felezi a β szöget. A szerkesztés: ① β szögfelezője $\Rightarrow f_\beta$. ② $f_\beta \cap AC = L$. ③ L ponton át AB-vel párhuzamosan húzott egyenes $\Rightarrow g$. ④ $g \cap BC = N$. ⑤ N ponton át AC-vel párhuzamosan húzott egyenes $\Rightarrow h$. ⑥ $h \cap AB = M \Rightarrow MN$ szakasz a megoldás. MN szakasz hosszának kiszámítása: A megfelelő szögek egyenlősége miatt $CLN\triangle \sim CAB\triangle$ és $BNM\triangle \sim BCA\triangle$, illetve az $MNLA$ paralelogramma oldalaira $AL = MN$ és $LN = BN \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{CL}{CA} = \frac{LN}{AB}$, $\frac{b - AL}{b} = \frac{LN}{c}$, $\frac{b - MN}{b} = \frac{BN}{c}$ és $\frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$, $\frac{BN}{a} = \frac{MN}{b} \Rightarrow BN = \frac{a}{b}MN$,

$$\frac{b - MN}{b} = \frac{\frac{a}{b}MN}{c} \Rightarrow \text{a szakasz hossza } MN = \frac{bc}{a + c}.$$



1127/I.



1127/II.

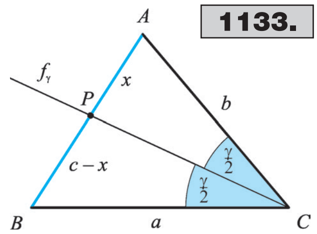
1131. $DE \parallel AC \Rightarrow ABC\sphericalangle$-ben alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BE}{BC}$, azaz $\dfrac{DE}{28} = \dfrac{32 - CE}{32} \Rightarrow CE = 32 - \dfrac{8}{7}DE$.
$\dfrac{DE}{AC} = \dfrac{BD}{BA}$, azaz $\dfrac{DE}{28} = \dfrac{24 - AD}{24} \Rightarrow AD = 24 - \dfrac{6}{7}DE$.
A fentiekből $AD + CE = 56 - 2DE$ és $AD + CE = 16$ cm adott $\Rightarrow DE = \underline{\underline{20\ \text{cm}}}$.

Szögfelezőtétel

1132. Legyen $f_c \cap AB = P$. Jelöljük az AP szakasz hosszát x-szel. $\Rightarrow PB = 5{,}5\ \text{cm} - x$.
Alkalmazzuk a szögfelezőtételt: $x : (5{,}5 - x) = 6 : 7 \Rightarrow AP = x = \dfrac{33}{13}\ \text{cm} \approx 2{,}54\ \text{cm}$.
$PB = 5{,}5\ \text{cm} - \dfrac{33}{13}\ \text{cm} = \dfrac{77}{26}\ \text{cm} \approx 2{,}96\ \text{cm}$.

1133. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az ábra jelöléseivel: $x : (c - x) = b : a \Rightarrow b(c - x) = ax \Rightarrow bc = x(a + b) \Rightarrow x =$
$= \dfrac{bc}{a + b} \Rightarrow c - x = c - \dfrac{bc}{a + b} = \dfrac{ac}{a + b}$.

1133.

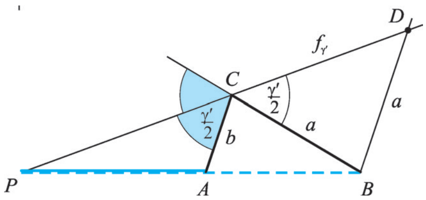


1134. **1. eset:** Ha $a = b$, akkor $f_\gamma \cap e(A; B) = \emptyset$.
2. eset: Ha $a \neq b$, akkor *a)* Húzzunk párhuzamost B-n át AC-vel $\rightarrow D$. $CDB\triangle$-ben $CDB\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \gamma'/2$, mert egyállású szögek. $DCB\sphericalangle = \gamma'/2$, mert D a külső szögfelező pontja. $\Rightarrow CDB\triangle$ egyenlő szárú, $DB = CB = a$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $DPB\sphericalangle$ CA és DB párhuzamos szelőire: $CA : DB = PA : PB$, azaz $\underline{\underline{b : a = PA : PB}}$.
b) $b : a = PA : (PA + c) \Rightarrow PA = \dfrac{bc}{a - b} \Rightarrow PB = \dfrac{bc}{a - b} + c = \dfrac{ac}{a - b}$. Megjegyzés: $a > b$ esetén P az A csúcshoz, $b > a$ esetén a B csúcshoz van közelebb.

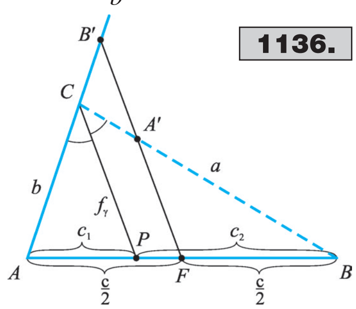
1135. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az $AC_1C\triangle$ f_1 szögfelezőjére, valamint a $BC_1C\triangle$ f_2 szögfelezőjére: $AD : DC = AC_1 : C_1C$ és $BE : EC = C_1B : C_1C$. Mivel C_1 felezéspont, $AC_1 = C_1B \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{AD : DC} = AC_1 : C_1C = C_1B : C_1C = \underline{BE : EC}$. Az aláhúzottak az $ACB\sphericalangle$ AB és DE szelőinek a szögszárakból kimetszett szakaszairól szólnak. A párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt $DE \parallel AB$.

1136. $CP \parallel B'F$ miatt alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét a $B'AB\sphericalangle$ CP és $B'F$ szelőire, valamint az $ABC\sphericalangle$ FA' és PC szelőire: $B'A : b = \dfrac{c}{2} : c_1 \Rightarrow \dfrac{c}{2} = c_1 \cdot \dfrac{B'A}{b}$ és $BA' : b = \dfrac{c}{2} : c_2 \Rightarrow \dfrac{c}{2} =$

1134.

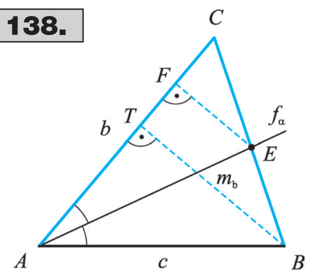


1136.

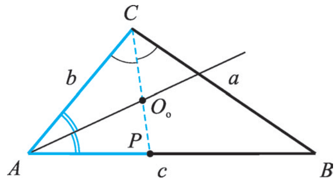


I

1138.



1139.



$= c_2 \cdot \dfrac{BA'}{a} \Rightarrow c_1 \cdot \dfrac{B'A}{b} = c_2 \cdot \dfrac{BA'}{a} \Rightarrow \underline{B'A} = \dfrac{c_2}{c_1} \cdot \dfrac{b}{a} \cdot BA' = \underline{BA'}$, mert a szögfelezőtétel szerint $\dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{a}{b}$.

1137. Legyen a párhuzamosnak a BC oldallal való metszéspontja Q. $PQ \parallel AC$; CP felezi $ACB\sphericalangle$-et. A szögfelezőtételből tudjuk, hogy $AP : PB = b : a$, azaz $(c - PB) : PB = b : a \Rightarrow PB = = \dfrac{ac}{a+b}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $ABC\sphericalangle$ PQ és AC párhuzamos szelőire: $PQ : AC = PB : AB$, azaz $PQ : b = \dfrac{ac}{a+b} : c \Rightarrow PQ = \dfrac{ab}{a+b}$.

1138. A szögfelezőtételt alkalmazva az f_α szögfelezőre: $CE : EB = b : c$. $EF \parallel BT$ miatt alkalmazzuk a szelőszakaszok tételét az $ACB\sphericalangle$ EF és BT szelőire: $TB : FE = CB : CE = (CE + EB) : CE = = 1 + EB : CE$. A szögfelezőtételt és az adatokat felhasználva: $\dfrac{m_b}{FE} = 1 + \dfrac{c}{b} \Rightarrow FE = \dfrac{m_b \cdot b}{b+c} = = 16\,\text{cm}$.

1139. Állítás: $CO_o : O_oP = (a+b) : c$.

Az $ABC\triangle$-re alkalmazott szögfelezőtételből belátható, hogy $AP = \dfrac{bc}{a+b}$. Alkalmazzuk a szögfelezőtételt az $APC\triangle$-ben a $CAP\sphericalangle$ AO_o felezőjére: $CO_o : O_oP = b : \dfrac{bc}{a+b} = 1 : \dfrac{c}{a+b} \Rightarrow$
$\Rightarrow CO_o : O_oP = (a+b) : c$.

Magasságtétel, befogótétel

1140. Legyen a háromszög derékszögű csúcsa C, az ebből induló magasság talppontja T.
c) $ATC\triangle \sim CTB\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők. $\lambda = \dfrac{BC}{AC} = n \Rightarrow \dfrac{TB}{TC} = \dfrac{TC}{AT} = n \Rightarrow AT = \dfrac{TC}{n}$ és $TB = TC \cdot n \Rightarrow AT : TB = \dfrac{TC}{n} : (TC \cdot n) = 1 : n^2$, tehát az átfogó szeleteinek aránya $1 : n^2$.
a) esetben $n = 3$, az arány $1 : 9$. *b)* esetben $n = 4$, az arány $1 : 16$. *d)* esetben $n = \dfrac{p}{q}$, az arány $\dfrac{q^2}{p^2}$.

1141. Legyen az átfogó két szelete p és $122 - p$. A befogótétel szerint $(5x)^2 = 122p$ és $(6x)^2 = = 122 \cdot (122 - p) \Rightarrow \dfrac{25x^2}{36x^2} = \dfrac{122p}{122 \cdot (122 - p)} \Rightarrow 25 \cdot (122 - p) = 36p \Rightarrow p = 50$ cm, azaz $\underline{\underline{AT = 50\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{TB = 72\,\text{cm}}}$.

I

1142. Legyen az átfogó két szelete y és $y+2$. A befogótétel szerint $(2x)^2 = y(2y+2)$ és $(3x)^2 = (y+2)(2y+2) \Rightarrow \frac{9x^2}{4x^2} = \frac{(y+2)(2y+2)}{y(2y+2)} \Rightarrow 9y = 4y + 8 \Rightarrow y = 1{,}6$ cm, azaz $AT = 1{,}6$ cm és $TB = 3{,}6 \text{ cm} \Rightarrow \underline{\underline{AB}} = AT + TB = \underline{\underline{5{,}2\text{ cm}}}$.

1143. Legyen a háromszög derékszögű csúcsa C, az ebből induló magasság talppontja T. $ABC\triangle \sim ACT\triangle \sim CTB\triangle$, mert mindegyik derékszögű és $BAC\sphericalangle = CAT\sphericalangle = BCT\sphericalangle$.
A megfelelő oldalak aránya: $\frac{AC}{CB} = \frac{AT}{TC} \Rightarrow \frac{3x}{7x} = \frac{p}{42} \Rightarrow \underline{\underline{p = 18\text{ cm}}}$ és $\frac{AC}{CB} = \frac{TC}{TB} \Rightarrow \frac{3x}{7x} = \frac{42}{q} \Rightarrow \underline{\underline{q = 98\text{ cm}}}$.

1144. Magasságtétel: $m_c = \sqrt{4 \cdot 12} = 4\sqrt{3}$ cm. Befogótétel: $b = \sqrt{4 \cdot 16} = 8$ cm és $a = \sqrt{12 \cdot 16} = 8\sqrt{3}$ cm.

1145. Befogótétel: $5 = \sqrt{2c} \Rightarrow c = 12{,}5 \text{ cm} \Rightarrow TB = 10{,}5$ cm és $a = \sqrt{12{,}5 \cdot 10{,}5} = 2{,}5\sqrt{21}$ cm.
Magasságtétel: $m_c = \sqrt{2 \cdot 10{,}5} = \sqrt{21}$ cm.

1146. Legyen a háromszög derékszögű csúcsa C, az ebből induló magasság talppontja T.
Pitagorasz tétele az $ATC\triangle$-re: $AT^2 = 25 - 9 \Rightarrow AT = 4$ cm.
Befogótétel: $5 = \sqrt{4c} \Rightarrow c = 6{,}25 \text{ cm} \Rightarrow TB = 2{,}25$ cm és $a = \sqrt{2{,}25 \cdot 6{,}25} = 3{,}75$ cm.

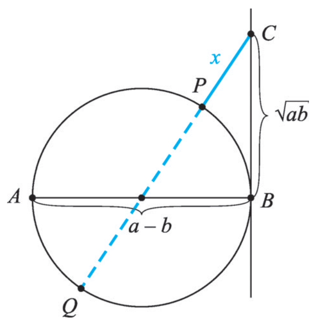
1147. A szerkesztés: ① $(a+b)$ átmérőjű k kör átmérővégpontjai A és B. ② A-tól a távolságra lévő T pontban merőleges AB-re: m. ③ $m \cap k = \{C_1; C_2\}$. $C_1T = C_2T = \sqrt{ab}$ az $ABC\triangle$-re alkalmazott magasságtétel miatt.

1148. A téglalap oldalai a és b, a keresett négyzet oldala x. A téglalap és a négyzet területe egyenlő: $ab = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{ab}$. A téglalap két szomszédos oldalának mértani közepét kell megszerkeszteni. Az eljárást lásd az 1147. feladatnál.

1149. Felhasználjuk: Ha egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a és b szakaszokra bontja az átfogót, akkor az átfogóhoz tartozó magasság $\sqrt{ab}$. A szerkesztés: ① Vegyünk fel $(a+b)$ átmérőjű kört $\to k$; A; B. ② Húzzunk párhuzamost AB-vel tőle $\sqrt{ab}$ távolságra: e_1; e_2. ③ $e_i \cap k = \{C_1; C_2; C_3; C_4\}$. ④ C-ből merőleges AB-re $\to T$, $AT = a$ és $TB = b$.
0 vagy 1 megoldás lehet.

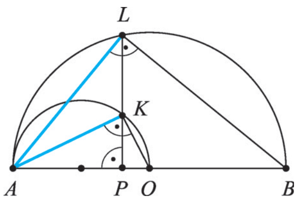
1150. A szerkesztés: ① Rajzoljunk $(a - b)$ átmérőjű kört. ② Az egyik átmérő végpontjában meghúzzuk az érintőt. ③ Az érintőre felmérjük a $\sqrt{ab}$ szakaszt. ④ Az új végpontot összekötjük a kör középpontjával. ⑤ A szelő rövidebb darabja b, hosszabb darabja a hosszúságú. Az ⑤ pont bizonyítása: A C-ből induló szelőre a szelődarabok tétele: $x(x + a - b) = \sqrt{ab}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + (a-b)x - ab = 0$, aminek megoldásai:
$x_{1;2} = \frac{-a + b \pm (a+b)}{2} \to x_1 = -a$, ami nem lehet, illetve $x_2 = b$.
Tehát $CP = b$ és $CQ = b + a - b = a$, ezért a szerkesztés valóban a-hoz és b-hez vezetett.

1150.



I

1153.



1151. A befogótétel szerint $b = \sqrt{pc}$ és $a = \sqrt{qc} \Rightarrow b^2 = pc$ és $a^2 = qc \Rightarrow \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{pc}{qc} = \dfrac{p}{q}$.

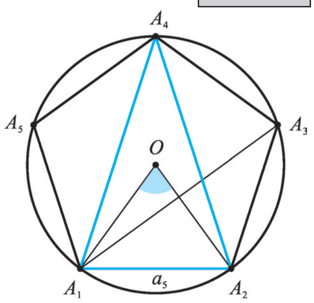
1152. $ABC\triangle$-ben B-nél derékszög van Thalész tétele miatt. A befogótételt alkalmazva az $ABC\triangle$-re: $AB = \sqrt{AT \cdot AC}$.

1153. Thalész tétele miatt $AKO\sphericalangle = 90°$. Az $AKO\triangle$-ben KP az átfogóhoz tartozó magasság, így AK a befogótételből számolható: $AK = \sqrt{AP \cdot AO}$. Ugyancsak Thalész tétele miatt $ALB\sphericalangle = 90°$. Az $ALB\triangle$-ben LP az átfogóhoz tartozó magasság, így $AL = \sqrt{AP \cdot AB}$ a befogótételt felhasználva. $AL = \sqrt{AP \cdot AB} = \sqrt{AP \cdot 2AO} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{AP \cdot AO} = \sqrt{2} \cdot AK \Rightarrow AL^2 = 2AK^2$.

Aranymetszés

1154. Vegyünk fel egy a átmérőjű kört. Húzzunk hozzá A külső pontból $AB = a$ hosszú érintőszakaszt, majd A-ból egy, a kört C-ben és D-ben metsző szelőt. Írjuk fel a szelődarabok szorzatára vonatkozó összefüggést az A pontból induló AC szelőre és AB érintőre: $a^2 = AC \cdot AD \Rightarrow$ $\Rightarrow a^2 = AC \cdot (AC + a) \Rightarrow AC$ szakasz az AB szakasz aranymetszete.

1158.



1155. Legyen a háromszög alapja AB, az A-ból induló szögfelező AD.

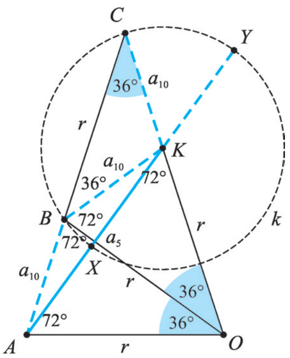
$ABD\triangle \sim CAB\triangle$. $\dfrac{\alpha}{2} = 180° - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 72°$; $\quad 180° - 2\alpha = 36°$.

A háromszög szögei 72°; 72° és 36°.

1156. A háromszög alapon fekvő szögének szögfelezője az eredetivel hasonló háromszöget vág le, mert mindkettőben 36°-; 72°- és 72°-osak a szögek. $\Rightarrow ABD\triangle \sim CAB\triangle$. A szögfelezés miatt $ADC\triangle$ is egyenlő szárú, így $AD = DC = a \Rightarrow BD = b - a$.

A hasonlóságnál egymásnak megfelelő oldalak aránya: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b-a}{a} \Rightarrow a^2 = b(b-a) \Rightarrow$ az a alap aranymetszete b-nek.

1159.

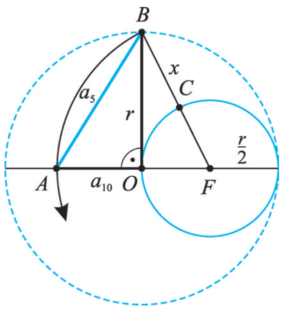


1157. A szabályos tízszög a körülírt kör középpontjából a csúcsokhoz húzott sugarakkal tíz darab egyenlő szárú háromszögre bontható. Ezeknek a háromszögeknek 36°-os szárszöge van, ezért az 1156. feladat eredményét felhasználva az alap aranymetszete a szárnak: alap $\to a_{10}$, a tízszög oldala; szár $\to r$, a kör sugara.

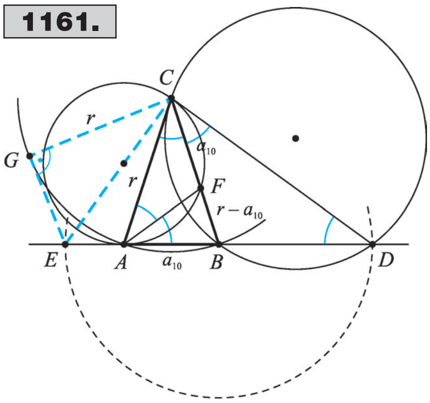
1158. $A_1A_2A_4\triangle$ egyenlő szárú. Az $A_1OA_2\sphericalangle$ a teljesszög ötöde, 72°. $A_1OA_2\sphericalangle$-gel azonos íven nyugvó kerületi szög az $A_1A_4A_2\sphericalangle$, ami fele a középponti szögnek $\Rightarrow A_1A_4A_2\sphericalangle = 36°$. Az $A_1A_4A_2\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge 36°, így az 1156. feladat szerint alapja a szár aranymetszete: alap $\to a_5$; szár $\to$ az ötszög átlója.

1159. Legyen $AOB\triangle$ és $BOK\triangle$ a 10 oldalú szabályos sokszög két szomszédos oldalához tartozó középponti háromszöge. OK-t hosszabbítsuk meg $KC = a_{10}$ szakasszal. Az egyes részhá-

1160.



1161.



romszögek szögeit az ábra tartalmazza. Eszerint $AOC\triangle$ egyenlő szárú, $AC = OC = a_{10} + r$ és $ACO\sphericalangle = 36°$. $AOK\sphericalangle = 72°$ és $AO = OK = r$ miatt $AK = a_5$. Tekintsük a K középpontú a_{10} sugarú kört. B és C rajta van ezen a körön. Vegyük a k körhöz A-ból húzott szelőket. A szelődarabok szorzatára vonatkozó tétel miatt: $AB \cdot AC = AX \cdot AY \Rightarrow a_{10}(a_{10} + r) = (a_5 - a_{10})(a_5 + a_{10})$ (*). Az 1156. feladatban láttuk, hogy a 36°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög alapja aranymetszete a szárnak, tehát $r^2 = a_{10}(a_{10} + r)$. Ezt a (*) összefüggésben felhasználva:

$r^2 = (a_5 - a_{10})(a_5 + a_{10}) \Rightarrow r^2 + a_{10}^2 = a_5^2$.

1160. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt az $OFB\triangle$-re: $\left(x+\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow x^2 + rx = r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x + r) = r^2. \Rightarrow x$ aranymetszete r-nek (l. 1154. feladat) $\Rightarrow x = a_{10}$ (l. 1155. feladat). Az ábra alapján $AO = BC = x = a_{10}$. Írjunk Pitagorasz-tételt az AOB derékszögű háromszögre:

$AB^2 = a_{10}^2 + r^2$. Az 1159. feladat állítását felhasználva $AB = a_5$.

1161. Az ábrán a $BCD\triangle$ körülírt köre a BC szakasz, az $AFC\triangle$ körülírt köre az AF szakasz 36°-os látószögkörívének tekinthető. $\Rightarrow BCA\sphericalangle$, illetve az $FAB\sphericalangle$ érintőszárú kerületi szögek $\Rightarrow$ $\Rightarrow AC$ egyenes a $BCD\triangle$ körülírt körének, BA egyenes pedig az $AFC\triangle$ körülírt körének érintője. Alkalmazzuk a szelődarabok tételét: A $BCD\triangle$ köré írt körhöz az A-ból induló érintőre és szelőre $r^2 = a_{10}(a_{10} + r)$. Az $AFC\triangle$ köré írt körhöz a B-ből induló érintőre és szelőre $a_{10}^2 = r(r - a_{10})$. A BCE egyenlő szárú háromszög szára r, a szárszöge 72°, tehát EC tekinthető az r sugarú körbe írható szabályos ötszög oldalának. Az E pontból a C középpontú r sugarú körhöz a_{10} hosszú érintő húzható (EG), mert $EG^2 = EA \cdot EB = (r - a_{10})r$, és a jobb oldalról már megmutattuk, hogy a_{10}^2-tel egyenlő. Így az $EGC\triangle$ G-ben derékszögű, a két befogó a_{10} és $r = a_6$, az átfogó a_5.

Menelaosz tétele, Ceva tétele

1162. Húzzunk párhuzamost B-n át AC-vel! A párhuzamosnak a B_1, A_1, C_1 pontokat tartalmazó egyenessel való metszéspontja legyen B^*.
Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az $AC_1B_1\sphericalangle$ BB^* és AB_1 párhuzamos szelőire:
$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AB_1}{BB^*} \Rightarrow \frac{-AC_1}{C_1B} = \frac{-B_1A}{BB^*} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{B_1A}{BB^*}$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $CA_1B_1\sphericalangle$ BB^* és CB_1 párhuzamos szelőire: $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BB^*}{CB_1} \Rightarrow \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BB^*}{B_1C}$. Vizsgáljuk

az állításban kijelölt szorzatot, felhasználva a fent kapott eredményeket: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=$
$=\frac{B_1A}{BB^*}\cdot\frac{BB^*}{B_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CB_1}{B_1C}=-1.$

1163. Tegyük fel, hogy B_1, A_1 és C_1 nincsenek egy egyenesen. Legyen B_1A_1 összekötő egyenesének az AB egyenessel való metszéspontja C^*. Alkalmazzuk a Menelaosz-tételt a B_1A_1 egyenesre: $\frac{AC^*}{C^*B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$. A feltétel szerint: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$. Egyenlőségükből:
$\frac{AC^*}{C^*B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\Rightarrow\frac{AC^*}{C^*B}=\frac{AC_1}{C_1B}\Rightarrow\frac{AC_1+C_1C^*}{C^*C_1+C_1B}=\frac{AC_1}{C_1B}\Rightarrow AC_1\cdot C_1B+$
$+C_1C^*\cdot C_1B=AC_1\cdot C^*C_1+AC_1\cdot C_1B\Rightarrow C_1C^*(C_1B+AC_1)=0$. C_1B+AC_1 nem lehet 0, mert $A\neq B$, tehát csak $C_1\equiv C^*$ lehet, vagyis B_1, A_1 és C_1 egy egyenesen vannak.

1164. Legyen a C-ből induló szögfelezőnek AB-vel való metszéspontja P, az A-ból induló szögfelezőnek BC-vel való metszéspontja Q, a beírt kör kp-ja O_o.
Alkalmazzuk a Menelaosz-tételt a $PBC\triangle$-re és az A, O_o, Q pontokat tartalmazó szelőre: $\frac{BA}{AP}\cdot\frac{PO_o}{O_oC}\cdot\frac{CQ}{QB}=-1$. A szögfelezőtétel miatt $\frac{BA}{AP}=\frac{c}{-\frac{cb}{a+b}}=-\frac{a+b}{b}$, illetve $\frac{CQ}{QB}=\frac{b}{c}$.
Az összefüggéseket behelyettesítve: $-\frac{a+b}{b}\cdot\frac{PO_o}{O_oC}\cdot\frac{b}{c}=-1\Rightarrow PO_o:O_oC=\frac{c}{a+b}$.

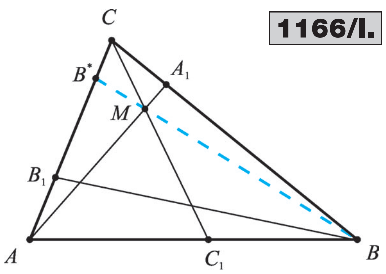
1165. Legyen az AA_1, BB_1, és CC_1 egyenesek metszéspontja M. Alkalmazzuk a Menelaosz-tételt az $AC_1C\triangle$-re és a B, M, B_1 pontokat tartalmazó szelőre:

(1) $\frac{AB}{BC_1}\cdot\frac{C_1M}{MC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$

Alkalmazzuk a Menelaosz-tételt a $BC_1C\triangle$-re és az A, M, A_1 pontokat tartalmazó szelőre:

(2) $\frac{BA}{AC_1}\cdot\frac{C_1M}{MC}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}=-1$. Osszuk el az (1) összefüggést a (2) összefüggéssel:
$\frac{AB}{BC_1}\cdot\frac{C_1M}{MC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{BA}\cdot\frac{MC}{C_1M}\cdot\frac{A_1B}{CA_1}=1$. Felhasználva az $AB=-BA$ és $A_1B=-BA_1$ és $BC_1=$ $=-C_1B$, $CA_1=-A_1C$ egyenlőségeket, az állítást kapjuk: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

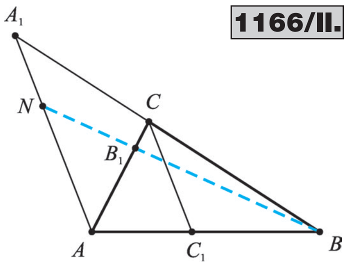
1166/I.



1166. Feltétel: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

1. eset:
Tegyük fel, hogy AA_1 és CC_1 M-ben metszik egymást. Tegyük fel, hogy BB_1 a feltétel ellenére sem megy át M-en. Legyen $BM\cap AC=B^*$. Alkalmazzuk a Ceva-tételt az $ABC\triangle$-re és az AA_1, BB^*, CC_1 egy ponton átmenő szelőkre: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB^*}{B^*A}=1$. A feltétellel összehasonlítva:

1166/II.



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB^*}{B^*A}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\Rightarrow\frac{CB^*}{B^*A}=\frac{CB_1}{B_1A}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{CB_1+B_1B^*}{B^*B_1+B_1A}=\frac{CB_1}{B_1A}\Rightarrow CB_1\cdot B_1A+B_1B^*\cdot B_1A=$$

$=CB_1\cdot B^*B_1+CB_1\cdot B_1A\Rightarrow B_1B^*(CB_1+B_1A)=0\Rightarrow$
$\Rightarrow B_1B^*\cdot CA=0.$ $AC\neq 0$ miatt $B_1B^*=0$ teljesülése kell, ami azt jelenti, hogy $B_1\equiv B^*$, tehát az egyenesek egy pontban, M-ben metszik egymást.

2. eset:

Tegyük fel, hogy $AA_1\parallel CC_1$, de BB_1 nem párhuzamos velük. A feltétel szerint $e(B;B_1)\cap e(A;A_1)=$ $=N$. Ekkor az első esetben bizonyítottak szerint $N\in e(C;C_1)$, azaz CC_1 nem lenne párhuzamos AA_1 egyenessel.

1167. *a)* Súlyvonalak esetében: $AC_1=C_1B$ és $BA_1=A_1C$ és $CB_1=B_1A$.

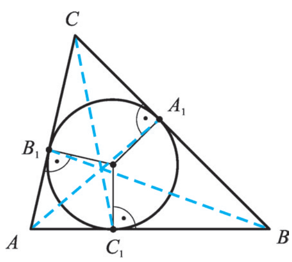
$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{AC_1}\cdot\frac{BA_1}{BA_1}\cdot\frac{CB_1}{CB_1}=1$, tehát a Ceva-tétel megfordítása miatt AA_1, BB_1 és CC_1 súlyvonalak egy pontban metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mert A_1, B_1 és C_1 az oldalak belső pontjai).

b) Szögfelezők esetében a szögfelezőtétel szerint: $AC_1:C_1B=b:a$ és $BA_1:A_1C=c:b$ és $CB_1:B_1A=a:c$. $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$, tehát a Ceva-tétel megfordítása miatt AA_1, BB_1 és CC_1 szögfelezők egy pontban metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mert A_1, B_1 és C_1 az oldalak belső pontjai).

c) Magasságvonalak esetében: $AC_1C\triangle\sim AB_1B\triangle$, mert mindkettő derékszögű és A-nál lévő szögük egyenlő. $\Rightarrow AC_1:B_1A=b:c$. $AA_1B\triangle\sim CC_1B\triangle\Rightarrow BA_1:C_1B=c:a$ és $AA_1C\triangle\sim BB_1C\triangle\Rightarrow$ $\Rightarrow CB_1:A_1C=a:b$. Vizsgáljuk az arányok szorzatát.

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{B_1A}\cdot\frac{BA_1}{C_1B}\cdot\frac{CB_1}{A_1C}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$. A merőleges viszony miatt a párhuzamosság nem fordulhat elő, így Ceva tételének megfordítása miatt az AA_1, BB_1 és CC_1 magasságvonalak egy pontban metszik egymást. Megjegyzés: Tompaszögű háromszög esetében C_1 is, B_1 is külső pont, így két negatív tényező szerepel, ami a szorzat előjelét nem változtatja. A bizonyítás derékszögű háromszög esetében a Ceva-tétel felhasználásával nem végezhető el.

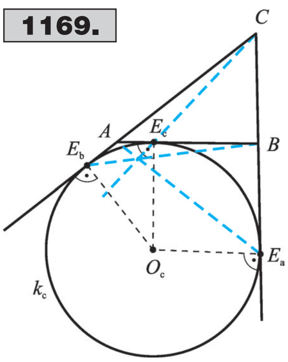
1168.



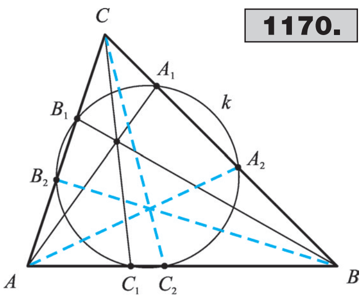
1168. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők: $AB_1=C_1A$; $BC_1=A_1B$; $CA_1=B_1C$.

$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{C_1B}{CB_1}\cdot\frac{CB_1}{AC_1}=1$, tehát Ceva tételének megfordítása miatt az AA_1, BB_1 és CC_1 egy pontban metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mert A_1, B_1 és C_1 mindegyike belső pont).

1169.



1169. A külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $CE_b=E_aC$ és $AE_b=E_cA$ és $E_aB=BE_c$. Vizsgáljuk meg az AE_a, BE_b és CE_c szelők által létrehozott szeletek arányának szorzatát:



1170.

$\frac{AE_c}{E_cB}\cdot\frac{BE_a}{E_aC}\cdot\frac{CE_b}{E_bA}=\frac{-AE_b}{-E_aB}\cdot\frac{-E_aB}{E_aC}\cdot\frac{E_aC}{-AE_b}=1$. Ceva tételének megfordítása miatt az AE_a, BE_b és CE_c egyenesek egy pontban metszik egymást (párhuzamosak nem lehetnek, mivel A és E_a, B és E_b a CE_c egyenesnek más-más oldalára esnek).

1170. Feltétel: AA_1, BB_1 és CC_1 egy pontban metszik egymást. A Ceva-tétel miatt $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$. A-ból k-hoz húzott szelőkre a szelődarabok szorzata: $AC_1\cdot AC_2=$ $=B_2A\cdot B_1A\Rightarrow\frac{AC_2}{AB_2}=\frac{AB_1}{AC_1}$. B-ből húzott szelőkre: $C_2B\cdot C_1B=BA_2\cdot BA_1\Rightarrow\frac{BA_2}{BC_2}=\frac{BC_1}{BA_1}$. C-ből húzott szelőkre: $A_1C\cdot A_2C=CB_1\cdot CB_2\Rightarrow\frac{CB_2}{CA_2}=\frac{CA_1}{CB_1}$. Vizsgáljuk a Ceva-feltételt a 2 indexű pontokra: $\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{AC_2}{B_2A}\cdot\frac{BA_2}{C_2B}\cdot\frac{CB_2}{A_2C}=\frac{AC_2}{-AB_2}\cdot\frac{BA_2}{-BC_2}\cdot\frac{CB_2}{-CA_2}=$

$=(-1)\cdot\frac{AB_1}{AC_1}\cdot(-1)\cdot\frac{BC_1}{BA_1}\cdot(-1)\cdot\frac{CA_1}{CB_1}=(-1)\cdot\frac{-B_1A}{CB_1}\cdot(-1)\cdot\frac{-C_1B}{AC_1}\cdot(-1)\cdot\frac{-A_1C}{BA_1}=$

$=\frac{1}{\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}}=1\Rightarrow$ A Ceva-tétel megfordítása miatt az AA_2, BB_2 és CC_2 egyenesek egy pontban metszik egymást.

Hasonló négyszögek

1171. $AE\parallel CD\Rightarrow BEP\triangle\sim CDP\triangle\Rightarrow\frac{BE}{CD}=\frac{BP}{CP}=\frac{BC-CP}{CP}$.

a) $\frac{5}{20}=\frac{5-CP}{CP}\Rightarrow\underline{\underline{CP=4\,\text{cm}}}$. *b)* $\frac{b}{a}=\frac{b-CP}{CP}\Rightarrow\underline{\underline{CP=\frac{ab}{a+b}}}$ cm, azaz $\frac{1}{CP}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

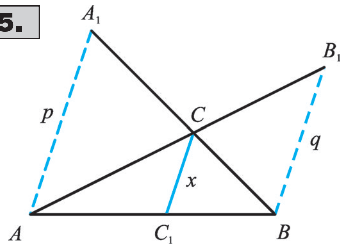
1172. $ABCD$ paralelogramma és $BP:PC=5:7\Rightarrow AD=BC$, $BP:BC=5:12=BP:AD$ és $AD\parallel BP\Rightarrow AED\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{BE}{AE}=\frac{BP}{AD}$, azaz $\frac{BE}{BE+4{,}2}=$ $=\frac{5}{12}\Rightarrow\underline{\underline{BE=3\,\text{cm}}}$.

1173. Legyen az E ponton át AD-vel húzott párhuzamosnak az AB oldallal való metszéspontja P, DC oldallal való metszéspontja Q. $PQ\parallel BC$, $AP+PB=a$ és $AE:EC=m:n\Rightarrow PE\parallel BC$ és $CAB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelők tétele szerint: $\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{a-AP}=\frac{m}{n}\Rightarrow\underline{\underline{AP=\frac{ma}{m+n}}}$; $\underline{\underline{PB=\frac{na}{n+m}}}$.

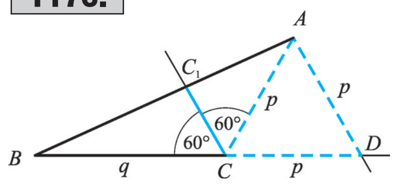
1174. Legyen a DE egyenesnek az AB egyenessel való metszéspontja P. $AE:EC=m:n$ és $AP\parallel CD\Rightarrow APE\triangle\sim CDE\triangle\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{CD}$, azaz $\frac{m}{n}=\frac{a+BP}{a}\Rightarrow\underline{\underline{BP=\frac{a(m-n)}{n}}}$.

I

1175.



1176.



1175. $AA_1 \parallel CC_1 \Rightarrow ABA_1\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{BC_1}{AB} = \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{x}{p} \Rightarrow BC_1 = \frac{AB \cdot x}{p}$. $BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow BAB_1\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{AC_1}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{x}{q} \Rightarrow AC_1 = \frac{AB \cdot x}{q}$. Fentieket összegezve: $AC_1 + BC_1 = AB \Rightarrow \frac{AB \cdot x}{p} + \frac{AB \cdot x}{q} = AB \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{pq}{p+q}}}$, azaz $\frac{1}{x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

1176. Hosszabbítsuk meg a BC szakaszt a C csúcson túl CA hosszúságú szakasszal, azaz $CD = CA = p$ legyen. Az $ACD\sphericalangle = 180° - 120° = 60°$és $CD = CA \Rightarrow ACD\triangle$ szabályos $\Rightarrow AD = p$ és $CDA\sphericalangle = 60°$ és $AD \parallel CC_1 \Rightarrow DBA\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{CC_1}{AD} = \frac{BC}{BD}$, azaz $\frac{CC_1}{p} = \frac{q}{p+q} \Rightarrow \underline{\underline{CC_1 = \frac{pq}{p+q}}}$.

1177. $CP \parallel DE \Rightarrow EAD\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{CP}{DE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{a+b}$. $QC \parallel FG \Rightarrow FBG\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{CQ}{FG} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow y = \frac{a \cdot b}{a+b}$. Fentieket összevetve: $\underline{\underline{x = y}}$.

1178. $\underline{\underline{CD = \frac{30}{7}\,\text{cm}}}$. **1179.** $\underline{\underline{EC = 20\,\text{cm}}}$. **1180.** $\underline{\underline{AD = 2\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{BC = 2{,}5\,\text{cm}}}$.

1181. Legyen a két szár egyenesének metszéspontja E. $AB \parallel CD \Rightarrow EDC\triangle \sim EAB\triangle \Rightarrow$ megfelelő oldalaik aránya egyenlő: *a)* $\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB}$, azaz $\frac{y}{y+4} = \frac{3}{10} \Rightarrow y = \frac{12}{7}$ és $\frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB}$, azaz $\frac{x}{x+6} = \frac{3}{10} \Rightarrow x = \frac{18}{7}$. A kiegészítő háromszög oldalai: $\underline{\underline{3\,\text{cm}, \frac{12}{7}\,\text{cm}, \frac{18}{7}\,\text{cm}}}$.

b) $\frac{ED}{EA} = \frac{DC}{AB}$, azaz $\frac{y}{y+d} = \frac{c}{a} \Rightarrow y = \frac{cd}{a-c}$ és $\frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB}$, azaz $\frac{x}{x+b} = \frac{c}{a} \Rightarrow x = \frac{bc}{a-c}$.

A kiegészítő háromszög oldalai: $\underline{\underline{c, \frac{cd}{a-c}, \frac{bc}{a-c}}}$ egység.

1182. $\underline{\underline{AC = 18\,\text{cm}}}$. **1183.** $\underline{\underline{DC = \frac{5}{3}\,\text{cm}}}$. **1184.** $\underline{\underline{BM = 24\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{MD = 3\,\text{cm}}}$.

1185. Legyen M az átlók metszéspontja. $AB \parallel CD \Rightarrow ABM\triangle \sim CDM\triangle \Rightarrow MC : MA = MD : MB$ és $DC : AB = MC : MA$. A fentiekből következik, hogy $MC : MA = DC : AB$.

1186. EF középvonal $\Rightarrow EF = \dfrac{AB + CD}{2} = 29\,\text{cm}$. $AB \parallel CD \Rightarrow ABM\triangle \sim CDM\triangle \Rightarrow \dfrac{AM}{MC} =$ $= \dfrac{BM}{MD} = \dfrac{9}{20} = \dfrac{AB}{CD}$ és $AB + CD = 58$ cm $\Rightarrow$ $\underline{\underline{AB = 18\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{CD = 40\,\text{cm}}}$.

1187. Legyenek P és Q a szárakon levő osztópontok. Legyen R az AC átló $m:n$ arányú osztópontja $\Rightarrow AR : RC = m : n$. $DAC\sphericalangle$-ben $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{AR}{RC}$ egyenlőség áll fenn a csúcsból induló, egymáshoz csatlakozó szakaszokra $\Rightarrow PR \parallel CD$. $ACB\sphericalangle$-ben $\dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{AR}{RC}$ egyenlőség áll fenn a csúcsból induló, egymáshoz csatlakozó szakaszokra $\Rightarrow RQ \parallel AB$. Mivel $AB \parallel CD$, a fentiek szerint $RQ \parallel PR \Rightarrow R, P, Q$ pontok egy egyenesen vannak $\Rightarrow PQ \parallel AB \parallel CD$.

1188. Legyenek P és Q a szárakon levő osztópontok. Felhasználjuk, hogy ha $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC}$ és $AB \parallel CD$, akkor $PQ \parallel AB \parallel CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{1}{2}$ és $AB \parallel CD$ a trapéz alapjai, valamint $AC \cap PQ = R \Rightarrow PR \parallel CD$, illetve $RQ \parallel AB$. $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{PR}{DC} = \dfrac{AP}{AD}$, azaz $\dfrac{PR}{9} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{PR = 3\,\text{cm}}}$. $ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{RQ}{AB} = \dfrac{CQ}{BC}$, azaz $\dfrac{RQ}{12} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{RQ = 8\,\text{cm}}}$. Hasonlóan kiszámítható, hogy $\underline{\underline{PS = 8\,\text{cm}}}$ és $\underline{\underline{QS = 3\,\text{cm}}}$.

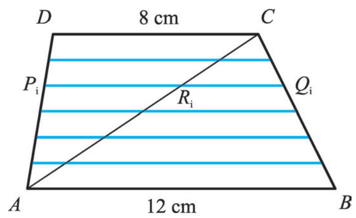
1189. Legyenek P és Q a szárakon levő osztópontok. Felhasználjuk, hogy ha $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC}$ és $AB \parallel CD$, akkor $PQ \parallel AB \parallel CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC} = \dfrac{2}{3}$ és $AB \parallel CD$ a trapéz alapjai, valamint $AC \cap PQ = R \Rightarrow PR \parallel CD$, illetve $RQ \parallel AB$. $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{PR}{DC} = \dfrac{AP}{AD}$, azaz $\dfrac{PR}{b} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow PR = \dfrac{2b}{5}$. $ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{RQ}{AB} = \dfrac{CQ}{BC}$, azaz $\dfrac{RQ}{a} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow RQ = \dfrac{3a}{5} \Rightarrow PR + RQ =$ $= \underline{\underline{PQ = \dfrac{3a + 2b}{5}}}$.

1190. Legyenek P_i és Q_i az egyes szárakon levő osztópontok. Felhasználjuk, hogy ha $\dfrac{AP_i}{P_iD} = \dfrac{BQ_i}{Q_iC}$ és $AB \parallel CD$, akkor $P_iQ_i \parallel AB \parallel CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\Rightarrow$ $\Rightarrow ABQ_iP_i$ és P_iQ_iCD négyszögek trapézok. P_2Q_2 az $ABCD$ trapéz középvonala $\Rightarrow \underline{\underline{P_2Q_2 = \dfrac{a + b}{2}}}$.

P_1Q_1 az ABQ_2P_2 trapéz középvonala $\Rightarrow \underline{\underline{P_1Q_1}} = \dfrac{a + \dfrac{a + b}{2}}{2} = \underline{\underline{\dfrac{3a + b}{4}}}$. P_3Q_3 az P_2Q_2CD trapéz középvonala $\Rightarrow \underline{\underline{P_3Q_3}} = \dfrac{\dfrac{a + b}{2} + b}{2} = \dfrac{a + 3b}{4}$.

1191. Legyenek az egyik szár meghosszabbításának új végpontjai P és Q, a másik száré S és R. Az 1187. feladat állítása szerint, ha $QA : AD : DP = RB : BC : CS$ és $AB \parallel CD \Rightarrow$ $\Rightarrow QR \parallel AB \parallel CD \parallel SP$. EF az $ABCD$ trapéz középvonala $\Rightarrow$ $\Rightarrow EF \parallel CD \parallel PS$ és $EF \parallel AB \parallel QR$, valamint $PD = DF$ és $AF =$ $= AQ$. Az EF középvonal hossza $(12 + 16) : 2 = 14$ cm. CD az $FESP$ trapéz középvonala $\Rightarrow$ $(PS + 14) : 2 = 12 \Rightarrow$ $\Rightarrow PS = 10$ cm a trapéz egyik alapja. AB a $QREF$ trapéz középvonala $\Rightarrow (QR + 14) : 2 = 16 \Rightarrow QR = 18$ cm a trapéz másik alapja.

1192.



1192. Felhasználjuk, hogy ha $\frac{AP_i}{P_iD} = \frac{BQ_i}{Q_iC}$ és $AB \parallel CD$, akkor $P_iQ_i \parallel AB \parallel CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\frac{AP_i}{P_iD} = \frac{BQ_i}{Q_iC} = \frac{i}{6-i}$ és $AB \parallel CD$ a trapéz alapjai, valamint $AC \cap P_iQ_i =$ $= R_i \Rightarrow P_iR_i \parallel CD$, illetve $R_iQ_i \parallel AB$. $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{P_iR_i}{DC} = \frac{AP_i}{AD}$, azaz $\frac{P_iR_i}{8} = \frac{i}{6} \Rightarrow P_iR_i = \frac{4i}{3}$. $ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{R_iQ_i}{AB} = \frac{CQ_i}{BC}$, azaz $\frac{R_iQ_i}{12} = \frac{6-i}{6} \Rightarrow R_iQ_i = 2(6-i)$. $P_iR_i + R_iQ_i = P_iQ_i = \frac{4i}{3} +$ $+ 2(6-i) = 12 - \frac{2i}{3}$. $P_1Q_1 = \frac{34}{3}$ cm, $P_2Q_2 = \frac{32}{3}$ cm, $P_3Q_3 = 10$ cm, $P_4Q_4 = \frac{28}{3}$ cm, $P_5Q_5 =$ $= \frac{26}{3}$ cm.

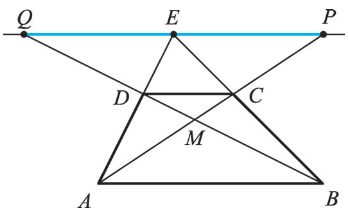
1193. Legyenek P és Q a szárakon levő osztópontok. Legyen $PQ \cap AC = R$ és $PQ \cap BD = S$. Felhasználjuk, hogy ha $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC}$ és $AB \parallel CD$, akkor $PQ \parallel AB \parallel CD$, amit az 1187. feladatban bizonyítottunk. $\frac{AP}{PD} = \frac{BQ}{QC} = \frac{m}{n}$ és $AB \parallel CD$ a trapéz alapjai, valamint $AC \cap PQ = R \Rightarrow PR \parallel CD$, illetve $RQ \parallel AB$.

a) $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint:
$\frac{PR}{DC} = \frac{AP}{AD}$, azaz $\frac{PR}{b} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow PR = \frac{mb}{m+n}$. $ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\frac{RQ}{AB} = \frac{CQ}{BC}$, azaz $\frac{RQ}{a} = \frac{n}{m+n} \Rightarrow RQ = \frac{na}{m+n}$. BD átló esetén hasonlóan adódik, hogy $PS = \frac{na}{m+n}$; $SQ = \frac{mb}{m+n}$.

b) $PR + RQ = PQ = \frac{na + mb}{m+n}$.

1194. Legyen M az átlók metszéspontja, $P \in AD$ és $Q \in BC$ pedig az M-en át húzott párhuzamosnak a szárakkal való metszéspontja. $AB \parallel CD \parallel e \Rightarrow ABM\triangle \sim CDM\triangle \Rightarrow \frac{DM}{MB} = \frac{CM}{MA} =$ $= \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{DM}{DB} = \frac{CM}{CA} = \frac{5}{13}$. $AB \parallel PM \Rightarrow ADB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint:

1195.



$\dfrac{PM}{AB}=\dfrac{DM}{DB}=\dfrac{5}{13}\Rightarrow\dfrac{PM}{8}=\dfrac{5}{13}\Rightarrow \underline{\underline{PM=\dfrac{40}{13}\text{ cm}}}.$ $AB\parallel MQ\Rightarrow$ $\Rightarrow ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{5}{13}\Rightarrow\dfrac{MQ}{8}=\dfrac{5}{13}\Rightarrow \underline{\underline{MQ=\dfrac{40}{13}\text{ cm}}}.$

1195. $DC\parallel EP\Rightarrow EAP\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{EP}{CD}=\dfrac{AE}{AD}$. $DC\parallel QE\Rightarrow EBQ\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{EQ}{CD}=\dfrac{BE}{BC}$. $AEB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelők tétele szerint: $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{BE}{BC}\Rightarrow\dfrac{EP}{CD}=\dfrac{EQ}{CD}\Rightarrow \underline{\underline{EP=EQ}}$. Megjegyzés: ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor nem jön létre az E metszéspont.

1196. Legyen M az átlók metszéspontja, P és Q pedig az M-en át húzott párhuzamosnak a szárakkal való metszéspontja. $AB\parallel PM\Rightarrow ADB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{PM}{AB}=\dfrac{DP}{DA}$. $AB\parallel MQ\Rightarrow ACB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{CQ}{CB}$. $ABM\triangle\sim CDM\triangle\Rightarrow\dfrac{DP}{DA}=\dfrac{CQ}{CB}\Rightarrow\dfrac{PM}{AB}=\dfrac{MQ}{AB}\Rightarrow \underline{\underline{PM=MQ}}$.

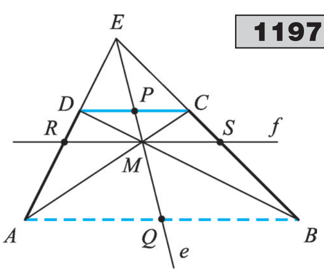
1197. Az 1196. feladatban láttuk, hogy az átlók M metszéspontja felezi a rá illeszkedő, az alapokkal párhuzamos egyenes trapézba eső szakaszát. $\Rightarrow RM=MS$. $DP\parallel RM\Rightarrow REM\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{DP}{RM}=\dfrac{EP}{EM}$. $PC\parallel SM\Rightarrow SEM\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{PC}{RM}=\dfrac{PC}{MS}=\dfrac{EP}{EM}\Rightarrow DP=PC\Rightarrow P$ felezi DC szakaszt. Hasonlóan igaz, hogy $AQ=QB\Rightarrow Q$ felezi az AB szakaszt. Tehát az EM egyenes felezi a trapéz alapjait. Megjegyzés: ha az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor nem jön létre az E metszéspont.

1198. Felhasználjuk, hogy ha $AH_1:AD=BH_2:BC=1:3$ és $AB\parallel CD$, akkor $H_1H_2\parallel CD$.

a) $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{AH_1}{AD}=\dfrac{H_1P}{CD}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow H_1P=\dfrac{1}{3}b$.

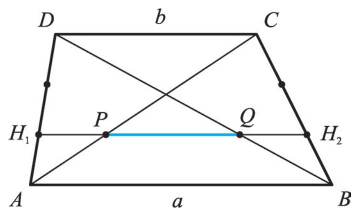
$ADB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{H_1D}{AD}=\dfrac{H_1Q}{AB}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow H_1Q=\dfrac{2}{3}a$.

A fentiekből következik, hogy $H_1Q-H_1P=\underline{\underline{PQ=\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{3}b}}$.

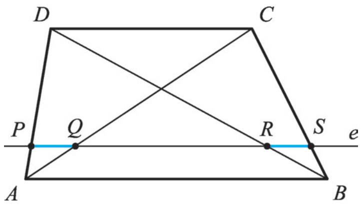


1197.

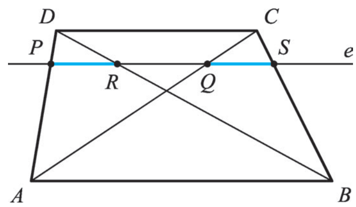
1198.



1199/I.



1199/II.



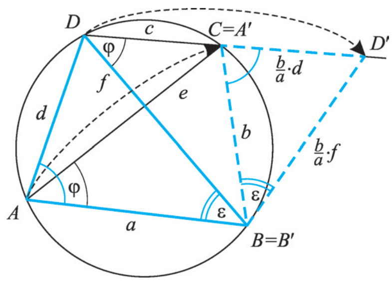
b) $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{AH_1}{AD}=\dfrac{H_1P}{CD}=\dfrac{m}{m+n}\Rightarrow$ $\Rightarrow H_1P=\dfrac{mb}{m+n}$. $ADB\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint: $\dfrac{H_1D}{AD}=\dfrac{H_1Q}{AB}=$ $=\dfrac{n}{m+n}\Rightarrow H_1Q=\dfrac{na}{m+n}$. A fentiekből következik: Ha $\dfrac{a}{b}\geq\dfrac{m}{n}$, akkor $PQ=H_1Q-H_1P$. Ha $\dfrac{a}{b}<\dfrac{m}{n}$, akkor $PQ=H_1P-H_1Q$. Tehát $PQ=\left|\dfrac{na-mb}{m+n}\right|$.

1199. $CD\parallel e\Rightarrow PQ\parallel CD$ és $RS\parallel CD$. $DAC\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele: $\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{AP}{AD}$. $CBD\sphericalangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tétele: $\dfrac{RS}{CD}=\dfrac{BS}{BC}$. Az AD egyenes és a BC egyenes által bezárt szögre a párhuzamos szelők tétele: $\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{BS}{BC}$. A fentiekből következik, hogy $\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{BS}{BC}=\dfrac{RS}{CD}$, azaz $PQ=RS$.

Az 1199/I. ábrán látható helyzetben: $\underline{\underline{PQ=RS}}$ és $\underline{\underline{PR}}=PQ+QR=RS+QR\underline{\underline{=QS}}\Rightarrow$ igaz az állítás. Az 1199/II. ábrán látható helyzetben: $\underline{\underline{PQ=RS}}$ és $\underline{\underline{PR}}=PQ-QR=RS-QR\underline{\underline{=QS}}\Rightarrow$ igaz az állítás.

1200. Alkalmazzunk B középpontú $\dfrac{b}{a}$ arányú forgatva nyújtást az $ABD\triangle$-re úgy, hogy A képe C legyen. D képét jelöljük D'-vel. $D'\in e(D;C)$, mivel $ABCD$ húrnégyszög, így $DAB\sphericalangle$ egyenlő a $DCB\sphericalangle$ külső szögével. A transzformáció miatt $CD'=\dfrac{b}{a}\cdot d$ és $BD'=\dfrac{b}{a}\cdot f$, a kerületi szögek tétele miatt $BAC\sphericalangle=BDC\sphericalangle=\varphi$. $ABC\triangle\sim DBD'\triangle$, mert $BAC\sphericalangle=BDD'\sphericalangle=\varphi$ és $ABC\sphericalangle=$ $=\varepsilon+DBC\sphericalangle=DBD'\sphericalangle$.

1200.



A hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő: $DD':BD'=AC:BC$, azaz $\dfrac{c+\dfrac{b}{a}\cdot d}{\dfrac{b}{a}\cdot f}=\dfrac{e}{b}\Rightarrow$ $\Rightarrow ac+bd=ef$. Megjegyzés: A tétel tetszőleges konvex négyszögre általánosítható. Bármely konvex négyszög átlóinak szorzata legfeljebb akkora, mint a szemközti oldalak szorzatának összege. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a négyszög húrnégyszög.